

Riemanngeometri
En egen väg till Gauss–Bonnet

Gustav Nilsson

Arbetsversion, 21 september 2026

Innehåll

1	Bakgrund från flervariabelanalys	3
2	Mångfalder	4
3	Riemannmetriker och förbindelser	5
4	Holonomi och krökning	7
5	Morseteori	8
6	Avstånd och geodeter	9
7	Gauss–Bonnetts sats	10

Kapitel 1

Bakgrund från flervariabelanalys

En funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definierad på en öppen mängd $U \subseteq \mathbb{R}^m$ sägs vara *glatt* om alla dess partiella derivator (av alla ordningar) existerar och är kontinuerliga överallt på U . Om $A \subseteq \mathbb{R}^m$ är en godtycklig (inte nödvändigtvis öppen) mängd sägs en funktion $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara glatt om den kan utökas till en glatt funktion på en öppen omgivning U av A . Om $A \subseteq \mathbb{R}^m$ och $B \subseteq \mathbb{R}^n$, sägs $F : A \rightarrow B$ vara en *diffeomorfi* om F är bijektiv och både F och $F^{-1} : B \rightarrow A$ är glatta,¹ och A och B sägs då vara *diffeomorfa*.

För en glatt funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definierad på en öppen mängd $U \subseteq \mathbb{R}^m$ existerar det för varje $p \in U$ en unik linjär avbildning $F'(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, (*totala*) *derivatan av F i p* , som uppfyller

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(p+h) - F(p) - F'(p)(h)}{\|h\|} = 0.$$

Med avseende på standardbaserna representeras $F'(p)$ av Jacobimatrisen

$$\begin{pmatrix} \partial_1 F_1(p) & \cdots & \partial_m F_1(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 F_n(p) & \cdots & \partial_m F_n(p) \end{pmatrix}.$$

Sats 1 (Inversa funktionssatsen). *Antag att $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en glatt funktion definierad på en öppen delmängd $U \subseteq \mathbb{R}^m$, och antag att $F'(p)$ är inverterbar för någon punkt $p \in U$. Då har p en öppen omgivning $V \subseteq U$ som av F avbildas diffeomorft på en öppen omgivning $F(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ av $F(p)$.*

¹Notera att det senare kravet inte följer automatiskt.

Kapitel 2

Mångfald

En n -mångfald är en delmängd $M \subseteq \mathbb{R}^k$ för något k , sådan att varje punkt $p \in M$ har en öppen¹ omgivning $U \subseteq M$ som är diffeomorf med en öppen delmängd av $V \subseteq \mathbb{R}^n$. En sådan diffeomorfi $x : U \rightarrow V$ kallas för ett (lokalt) koordinatsystem, och sägs vara centrerat i p om $x(p) = 0$.

Proposition 1. En funktion $F : M \rightarrow N$ mellan mångfaldar är glatt om och endast om det för varje $p \in M$ existerar ett koordinatsystem x kring p och y kring $F(p)$, sådana att $y \circ F \circ x^{-1}$ är glatt.

För varje punkt $p \in M$ definierar vi tangentrummet $T_p M$ enligt

$$T_p M = \{\gamma'(0) \mid \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ är en glatt kurva som uppfyller } \gamma(0) = p\}$$

Om γ är en sådan kurva och $F : M \rightarrow N$ är glatt, är $F \circ \gamma$ en glatt kurva som uppfyller $(F \circ \gamma)(0) = F(p)$, vilket betyder att $(F \circ \gamma)'(0) \in T_{F(p)} N$. För en fixerad funktion F går det att visa att $(F \circ \gamma)'(0)$ enbart beror på derivatan $\gamma'(0)$, och att detta beroende är linjärt, vilket ger en väldefinierad linjär avbildning $F'(p) : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, kallad derivatan av F i p , enligt $F'(p)(\gamma'(0)) := (F \circ \gamma)'(0)$.

Sats 2 (Inversa funktionssatsen på mångfaldar). Antag att $F : M \rightarrow N$ är glatt och att $F'(p) : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ är inverterbar, för någon punkt $p \in M$. Då finns en öppen omgivning $U \subseteq M$ av p som av F avbildas diffeomorft på en öppen omgivning $F(U) \subseteq N$ av $F(p)$.

Ett vektorfält på M är en glatt funktion $X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ som uppfyller att $X(p) \in T_p M$ för alla $p \in M$. Ett kovariant tensorfält av rang r är en funktion A som till varje punkt $p \in M$ associerar en multilinjär avbildning $A(p) : (T_p M)^r \rightarrow \mathbb{R}$, och som uppfyller glatthetsegenskapen att om $X_1, \dots, X_r$ är (glatta) vektorfält, så är funktionen $M \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto A(p)(X_1(p), \dots, X_r(p))$ glatt.

¹Här menas att U är öppen relativt M , att U är snittet av M och en öppen delmängd av $\mathbb{R}^k$.

Kapitel 3

Riemannmetriker och förbindelser

Låt M vara en mångfald. En *Riemannmetrik* på M är ett kovariant tensorfält av rang 2, sådant att det för varje $p \in M$ gäller att den bilinjära formen $g(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ är en inre produkt på $T_p M$. Med andra ord är kravet att $g(p)$ ska vara symmetrisk och positivt definit, för varje p . En mångfald med Riemannmetrik, (M, g) , kallas för en *Riemannmångfald*. Om (M, g_M) och (N, g_N) är Riemannmångfaldar av samma dimension och $F : M \rightarrow N$ är en glatt avbildning, säger vi att F är en *lokal isometri* om det för alla $p \in M$ och $v, w \in T_p M$ gäller att $g_M(p)(v, w) = g_N(F(p))(F'(p)(v), F'(p)(w))$. I detta fall är derivatan av F automatiskt¹ inverterbar i varje punkt. Om F dessutom är bijektiv säger vi att F är en *isometri*, och att (M, g_M) och (N, g_N) är *isometriska*, och det följer av inversa funktionssatsen att F är en diffeomorfi. Det finns alltid en Riemannmetrik på en mångfald; till exempel kan man betrakta den så kallade *inducerade metriken*, vilket är den Riemannmetrik som kommer från inbäddningen av M i $\mathbb{R}^k$, definierad enligt $g(p)(v, w) = \langle v, w \rangle$ där högerledet är skalärprodukten i $\mathbb{R}^k$.

Givet en tangentvektor $v \in T_p M$ vid en punkt $p \in M$ i en mångfald, och givet en glatt funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, går det att definiera derivatan av f i riktningen v genom att ta en kurva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ som uppfyller $\gamma(0) = p$ och $\gamma'(0) = v$, och definiera $\partial_v f := (f \circ \gamma)'(0)$. Alternativt kan man utvidga f till en glatt funktion på en öppen omgivning $U \subseteq \mathbb{R}^k$ av M och ta riktningsderivatan av f i klassisk mening.² Denna definition kräver inte någon Riemannmetrik, enbart en mångfald M , en funktion f , och en tangentvektor v . Den är dessutom diffeomorfiinvariant: om M och N är mångfaldar, $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ en glatt funktion, $F : M \rightarrow N$ en diffeomorfi, och $v \in T_p M$ en tangentvektor vid någon punkt $p \in M$, så gäller

$$\partial_v(f \circ F) = \partial_{F'(p)(v)} f.$$

Detta kan förstås också göras för glatta funktioner med målmängd $\mathbb{R}^m$.

Det går dock inte att definiera en naturlig riktningsderivata $\partial_v X$ av ett vektorfält X , åtminstone inte på ett diffeomorfiinvariant sätt. Eftersom ett vektorfält är en avbildning $X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$, går det förvisso att derivata denna avbildning och få ett element $\partial_v X \in \mathbb{R}^k$, men problemet är att detta inte nödvändigtvis måste ligga i $T_p M \subseteq \mathbb{R}^k$. Dessutom är inte själva inbäddningen av M i $\mathbb{R}^k$ särskilt viktig ur filosofisk synpunkt, och är mest en teknisk lösning för att kunna definiera släthet hos avbildningar mellan mångfaldar.³ Det som ligger till grund för problemet med att

¹ Detta kommer från att den är bevarar inre produkter och därmed är injektiv, tillsammans med att dimensionerna är lika.

² Notera att detta är väldefinierat och bara beror på värdena hos f på M . Ett sätt att inse detta är via ekvivalensen med den första definitionen.

³ Det går att definiera mångfaldar mer abstrakt, utan att prata om någon inbäddning i $\mathbb{R}^k$, men detta kommer inte att diskuteras här.

derivera vektorfält är att värdena hos ett vektorfält ligger i olika rum: $X(p)$ ligger i $T_p M$, medan $X(q)$ ligger i $T_q M$, och det finns inget kanoniskt sätt att identifiera de två rummen.

För att kunna identifiera tangentrum inför vi begreppet förbindelse,⁴ en struktur som låter oss göra precis detta. I $\mathbb{R}^k$ är det klart vad som menas med att ett vektorfält är konstant, och det spelar ingen roll i vilken riktning eller längs vilken väg man mäter detta. På allmänna Riemannmångfaldar visar det sig att det inte finns något lika enkelt begrepp; huruvida ett vektorfält är "konstant" (i Riemanngeometri kallas detta *parallellt*) eller inte beror i allmänhet på vägen det mäts längs. Därför behöver vi först införa några begrepp relaterade till kurvor. Om två kontinuerliga kurvor $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow M$ och $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow M$ uppfyller $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, säger vi att de är *konkatenerbara*, och deras *konkatenering* är kurvan $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) : [a, c] \rightarrow M$ som ges av

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t), & b \leq t \leq c. \end{cases}$$

En *styckvis glatt* kurva är en kurva som kan uttryckas som en konkatenering av ändligt många glatta kurvor.

Låt nu (M, g) vara en Riemannmångfald. Då är en *Levi-Civitaförbindelse* en regel som till varje styckvis glatt kurva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ associerar en linjär avbildning $P_\gamma : T_{\gamma(a)} M \rightarrow T_{\gamma(b)} M$, och som uppfyller:

- P_γ är en isometri⁵ mellan de två inreproduktrummen $(T_{\gamma(a)} M, g(\gamma(a)))$ och $(T_{\gamma(b)} M, g(\gamma(b)))$, för varje $\gamma : [a, b] \rightarrow M$.
- $P_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} = P_{\gamma_2} \circ P_{\gamma_1}$, för alla konkatenerbara par av styckvis glatta kurvor $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow M$ och $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow M$.
- För en glatt kurva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ och en fixerad vektor $v \in T_{\gamma(a)} M$, är kurvan av vektorer $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$, $t \mapsto P_{\gamma|_{[a, t]}}(v)$ glatt, och derivatan $\frac{d}{dt} \Big|_{t=a} P_{\gamma|_{[a, t]}}(v) \in \mathbb{R}^k$ beror bara på $\gamma'(a)$.
- Om $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow M$ och $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow M$ är glatta kurvor med $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, så gäller⁶

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=a} P_{\gamma_1|_{[a, t]}}(\gamma_2'(c)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=c} P_{\gamma_2|_{[c, t]}}(\gamma_1'(a)).$$

Tack vare följande sats kan vi prata om *Levi-Civitaförbindelsen* på (M, g) , vilken vi framöver kommer att beteckna med (P_γ) .

Sats 3 (Riemanngeometrins huvudsats). *Varje Riemannmångfald har en unik Levi-Civitaförbindelse.*

Vi kan nu slutligen definiera derivatan, betecknad $\nabla_v X$, av ett vektorfält X på⁷ (M, g) i en riktning $v \in T_p M$ vid en punkt $p \in M$. Låt nämligen $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ vara en glatt kurva med $\gamma(a) = p$ och $\gamma'(a) = v$, och definiera

$$\nabla_v X := \frac{d}{dt} \Big|_{t=a} (P_{\gamma|_{[a, t]}})^{-1}(X(\gamma(t))) = \lim_{h \searrow 0} \frac{(P_{\gamma|_{[a, a+h]}})^{-1}(X(\gamma(a+h))) - X(p)}{h}.$$

⁴För enkelhetens skull kommer vi bara att betrakta så kallade *Levi-Civitaförbindelser* på Riemannmångfaldar, men det finns flera bredare förbindelsebegrepp.

⁵Minns att *isometri* mellan inreproduktrum är en avbildning som bevarar den inre produkten. För mer allmänna förbindelser släpps detta krav till att avbildningarna P_γ enbart behöver vara linjära. Kravet att de dessutom ska vara isometrier kallas för *metricitet*.

⁶Ekvationen säger att den hastighet med vilken $\gamma_2'(c)$ börjar röra sig när den transporteras längs γ_1 är densamma som den hastighet med vilken $\gamma_1'(a)$ börjar röra sig när den transporteras längs γ_2 . Denna egenskap kallas för *torsionsfrihet*.

⁷Notera att vi skriver (M, g) snarare än M , eftersom definitionen beror på valet av metrik.

Kapitel 4

Holonomi och krökning

Kapitel 5

Morseteori

Kapitel 6

Avstånd och geodeter

Kapitel 7

Gauss–Bonnets sats