

Häfte med övningsblad

SF1683 del 2, HT25

Gustav Nilsson

Senast uppdaterat: 8 december 2025

Innehåll

Övning 1

Övning 2

Övning 3

Övning 4

Övning 5

Övning 6

Övning 7

Övning 8

Övning 9

Övning 10

Övning 11

SF1683 del 2, övning 1

PZ 4.2.1b

Bestäm Laplacetransformen till

$$f(t) = e^{-4t} \cosh(2t), \quad t \geq 0.$$

PZ 4.3.1b

Hitta funktionen $f(t)$ som uppfyller

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}.$$

S 49.2c

Bestäm Laplacetransformen till

$$f(t) = t - \lfloor t \rfloor, \quad t \geq 0,$$

där $\lfloor t \rfloor$ är det största heltalet som är mindre än eller lika med t .

PZ 4.4.3

Bestäm Laplacetransformen till

$$f(t) = \cos(t) \ln(t) \delta(t - \pi), \quad t \geq 0.$$

PZ 4.3.2c

Använd Laplacetransformen för att lösa initialvärdesproblemet

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

PZ 4.4.4d

Använd Laplacetransformen för att lösa initialvärdesproblemet

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Tentamen 2023-01-13, uppgift 1

Använd Laplacetransformen för att lösa initialvärdesproblemet

$$y''(t) + y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ e^{-3t}, & 2 \leq t \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

för $y(t)$, $t \geq 0$.

Tentamen 2022-01-14, uppgift 2

Lös initialvärdesproblemet

$$y'' + 2y' + y = \delta(t - 1) + \mathcal{U}(t - 2)e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

för $y(t)$, $t \geq 0$.

Övningstentamen 2, uppgift 4

Antag att $f(t)$, $t \geq 0$, är en kontinuerlig funktion som är av exponentiell typ, alltså sådan att $|f(t)| \leq Ke^{At}$ för konstanter K, A .

- Visa att Laplacetransformen av $f(t)$ är definierad för s med realdel $\operatorname{Re} s > A$.
- Antag dessutom att $f(t)$ har en kontinuerlig derivata. Bevisa formeln för Laplacetransformen av $f'(t)$, formel (8) i tabellen med Laplacetransformer.

SF1683 del 2, övning 2

PZ 4.5.2e

Lös integralekvationen $f(t) + \int_0^t f(u)e^{-(t-u)} du = 1$.

PZ 4.5.2b

Lös integralekvationen $\int_0^t f(u) du - f'(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq a, \\ 1, & a \leq t, \end{cases}$ där $a > 0$.

PZ 4.5.2d

Lös integralekvationen $f''(t) = \int_0^t u f(t-u) du$, med initialvillkoren $f(0) = -1$ och $f'(0) = 1$.

PZ 4.8.6

Antag att f och g är kontinuerligt deriverbara, att f , g , f' och g' är absolutintegrerbara på intervallet $[0, \infty)$, och att $f(0) = g(0) = 0$. Visa att $(f * g)' = f' * g = f * g'$.

PZ 4.8.11b

Använd Laplacetransformen för att lösa följande PDE-problem:
$$\begin{cases} xu_x + u_t = xt, & 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x < \infty, \\ u(0, t) = 0, & 0 \leq t < \infty. \end{cases}$$

PZ 4.8.11a

Använd Laplacetransformen för att lösa följande PDE-problem:
$$\begin{cases} u_x + 2xu_t = 2x, & 0 < x, t < \infty, \\ u(x, 0) = 1, & 0 \leq x < \infty, \\ u(0, t) = 1, & 0 \leq t < \infty. \end{cases}$$

PZ 4.6.7

Riemanns zetafunktion är definierad för varje $p > 1$ enligt $\zeta(p) = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$, och *Gammafunktionen* är definierad enligt $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt$. Visa att $\zeta(p) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{e^t - 1} dt$.

Tentamen 2022-04-20, uppgift 4

Lös initialvärdesproblemet $y'(t) + 6y(t) + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = \delta(t-2)$, $y(0) = 0$, för $y(t)$, $t \geq 0$, där $\delta(t)$ är Diracs deltafunktion. *Ledning: skriv tredje termen som en faltning av två funktioner.*

Övningstentamen 1, uppgift 5

Denna uppgift rör initialvärdesproblemet $y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$, $y(0) = y'(0) = 0$, för funktionen $y(t)$, $t \geq 0$, där a, b är reella konstanter. Använd Laplacetransformen för att visa att om $f(t)$ är av exponentiell typ så är också lösningen $y(t)$ av exponentiell typ.

Övningstentamen 2, uppgift 3

Använd Laplacetransformen för att bestämma den funktion $f(t)$, $t \geq 0$, som uppfyller

$$\int_0^t e^{-y} \cos(y) f(t-y) dy = t^2 e^{-t}.$$

PZ 2.1.1b

Beräkna Fourierserien för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ e^x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Annan uppgift 1¹

Bestäm Fourierserien för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+\pi}{2}, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{x-\pi}{2}, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Annan uppgift 2¹

Bestäm Fourierserien för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+\pi)^2}{4}, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{(x-\pi)^2}{4}, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Tentamen 2025-04-25, (del av) uppgift 1

Funktionen f har period 2π och ges på intervallet $-\pi < x \leq \pi$ av

$$f(x) = \sin(5|x|) + \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0, \\ 3, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Beräkna dess Fourierserie.

Tentamen 2025-01-10, (del av) uppgift 1

Låt funktionen $f(x)$ vara definierad som $f(x) = 2 + \cos(2x)$ för $0 < x < \pi$. Utvidga $f(x)$ till en funktion på intervallet $-\pi < x < \pi$ på tre olika sätt:

- (a) $f_a(x)$ som är en jämn funktion,
- (b) $f_b(x)$ som är en udda funktion,
- (c) $f_c(x)$ som har $f_c(x) = 0$ för $-\pi < x < 0$.

Beräkna Fourierserierna för $f_a(x)$, $f_b(x)$, $f_c(x)$.

Tentamen 2023-04-12, (del av) uppgift 1

Funktionerna f_1, f_2 har period 2π och ges på intervallet $-\pi < x \leq \pi$ av

- (a) $f_1(x) = x^2$,
- (b) $f_2(x) = \begin{cases} -x^2, & -\pi < x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Beräkna deras Fourierserier.

¹Av Rasmus.

SF1683 del 2, övning 4

Dirichlets sats

Antag att $f \in E'$, det vill säga, att f är en styckvis kontinuerlig funktion $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, sådan att gränsvärdet $\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existerar och är ändligt för alla $x \in [-\pi, \pi)$, och sådan att gränsvärdet $\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ existerar och är ändligt för alla $x \in (-\pi, \pi]$.

För alla $x \in (-\pi, \pi)$ konvergerar då Fourierserien för f , mot värdet $\frac{f(x-)+f(x+)}{2}$. För $x = \pm\pi$ konvergerar Fourierserien för f mot värdet $\frac{f(\pi-)+f(-\pi+)}{2}$.

Kommentar: För punkter $x \in (-\pi, \pi)$ där f är kontinuerlig följer det av satsen att Fourierserien konvergerar mot $f(x)$. Om f är kontinuerlig i både π och $-\pi$, och om $f(\pi) = f(-\pi)$, följer det av satsen att Fourierserien, för $x = \pm\pi$ konvergerar mot värdet $f(x) = f(\pi)$.

Annan uppgift 1

Från förra övningen vet vi att funktionen

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(x+\pi)^2}{4}, & x \in [-\pi, 0), \\ \frac{(x-\pi)^2}{4}, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

har Fourierkoefficienter

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n \neq 0, \\ \frac{\pi^2}{6}, & n = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad b_n = 0.$$

Använd detta för att bestämma värdet hos serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

PZ 2.11.7bd

Från förra övningen vet vi att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0), \\ e^x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

har Fourierkoefficienter

$$a_n = \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{\pi(n^2 + 1)} \quad \text{och} \quad b_n = \frac{n(1 - (-1)e^\pi)}{\pi(n^2 + 1)}$$

Bestäm vad Fourierserien för f konvergerar mot för $x = 0$, för $x = \frac{\pi}{2}$, och för $x = \pi$. Bestäm med hjälp av detta värdena på serierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

Annan uppgift 2

Bestäm den komplexa Fourierserien för funktionen $f(x) = x + x^2$, där $x \in (-\pi, \pi]$.

PZ 2.11.3a, PZ 2.11.9a

Bestäm Fourierserierna för funktionerna

$$f(x) = |\sin x| \quad \text{och} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0), \\ \sin x, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Tentamen 2025-01-10, (del av) uppgift 1

Låt funktionen $f(x)$ vara definierad som $f(x) = 2 + \cos(2x)$ för $0 < x < \pi$. Utvidga $f(x)$ till en funktion på intervallet $-\pi < x < \pi$ på tre olika sätt:

- (a) $f_a(x)$ som är en jämn funktion,
- (b) $f_b(x)$ som är en udda funktion,
- (c) $f_c(x)$ som har $f_c(x) = 0$ för $-\pi < x < 0$.

Förklara vad dessa funktioners Fourierserier konvergerar mot i de tre olika fallen.

Tentamen 2023-04-12, (del av) uppgift 1

Funktionerna f_1, f_2 har period 2π och ges på intervallet $-\pi < x \leq \pi$ av

- (a) $f_1(x) = x^2$,
- (b) $f_2(x) = \begin{cases} -x^2, & -\pi < x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Förklara vad deras Fourierserier konvergerar mot.

PZ 2.11.3b

Funktionen $f(x) = |\sin(x)|$ har Fourierserien

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{1-4n^2}.$$

Bestäm ett explicit uttryck för funktionen

$$g(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \sin(2nx)}{1-4n^2}.$$

PZ 2.11.3c

Bestäm med hjälp av förra uppgiften värdena hos serierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}.$$

Annan uppgift 1¹

Beräkna

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-ix}} \right|^2 dx.$$

Annan uppgift 2¹

Låt

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \frac{\pi}{2}, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Bestäm cosinus- och sinusserierna för f på intervallet $[0, \pi]$.

Egen uppgift

En cirkel med radie 1 har längden 2π , och området inuti en sån cirkel har arean π . Finns det något område i planet som har samma omkrets men har *större* area? I den här uppgiften ska vi angripa den frågan med hjälp av Fourierserier.

Antag att $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är ett (begränsat) område med omkrets 2π , och att randen ∂D kan parametriseras som en sluten kurva $(x(t), y(t))$, för $-\pi \leq t \leq \pi$, där kurvan har konstant fart 1 (vilket ger kurvan en total längd av 2π), där $(x(\pi), y(\pi)) = (x(-\pi), y(-\pi))$, och där kurvan löper moturs (positiv riktning) kring området D . För enkelhetens skull antar vi också att x och y är oändligt deriverbara. Funktionerna x och y är förstås reellvärda, eftersom $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ för varje t .

- (a) Utveckla x och y i komplexa Fourierserier: $x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{int}$ och $y(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{int}$.

Bestäm ett uttryck för integralen $\int_{-\pi}^{\pi} x'(t)^2 dt$ i termer av koefficienterna x_n , och motsvarande för y . Använd sedan villkoret om konstant fart för att härleda en ekvation från dessa.

- (b) Enligt Greens sats ges arean A hos området D av

$$\begin{aligned} A &= \iint_D dA = \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right) dA \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (-y dx + x dy) = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} y(t)x'(t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y'(t) dt. \end{aligned}$$

Använd den generaliserade varianten av Parsevals identitet för att uttrycka A i termer av koefficienterna x_n, y_n .

- (c) Skriv $x_n = a_n + b_n i$ och $y_n = c_n + d_n i$, där $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}$, och kombinera de två ekvationerna från deluppgift (a) och (b) för att få ett uttryck för differensen $1 - \frac{A}{\pi}$ i termer av a_n, b_n, c_n och d_n .
- (d) Använd kvadratkomplettering för att visa att högerledet är icke-negativt, och dra slutsatsen att $A \leq \pi$.

¹Av Rasmus.

Kommentar

Resultatet i uppgiften kallas ofta för den *isoperimetriska olikheten i planet*. Från ekvationen som härleds deluppgift (c) går det också att visa att likhet fås precis då $x_n = y_n = 0$ för alla n med $|n| \geq 2$. Eftersom x och y är kontinuerliga och uppfyller $x(-\pi) = x(\pi)$ och $y(-\pi) = y(\pi)$ är de enligt Dirichlets sats lika med sin Fourierserie, och det följer relativt direkt att ∂D är en ellips. Faktumet att omkretsen är 2π och π ger sen att ∂D måste vara en cirkel av radie 1.

Utöver Fourierserier finns det många alternativa sätt att visa den isoperimetriska olikheten, till exempel via *symmetriseringstekniker*, *variationskalkyl*, eller *geometriska flöden*.

Formler från formelbladet

$$\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a^2} \cos(ax) + \frac{x}{a} \sin(ax) \quad (46)$$

$$\int x \sin(ax) dx = -\frac{x \cos(ax)}{a} + \frac{\sin(ax)}{a^2} \quad (48)$$

Sinus- och cosinusserier

Om f är definierad på bara halva intervallet $[0, \pi]$ kan den utökas antingen till en jämn eller udda funktion på $[-\pi, \pi]$. Fourierserien för den udda utökningen är *sinusserien* för f , och Fourierserien för den jämna utökningen är *cosinusserien* för f .

Derivering av Fourierserier

Antag att $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$. Om f' också har en Fourierserie, dvs. om $f' \in E$, kan denna fås genom att derivera term för term: $f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx))$. Liknande gäller för den komplexa Fourierserien: om $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, och om f' också har en Fourierserie, gäller $f'(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{inx}$.

Ovanstående gäller även om f' inte existerar i enstaka punkter.

Parsevals identitet

Reella Fourierserier

Om $f \in E$ och

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

gäller

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Komplexa Fourierserier

Om $f \in E$ och

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

gäller

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Parsevals identitet i termer av Hilbertrum, isometrier och unitära operatorer (för SF1681-studenter)

Rummet E har den inre produkten $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$. Rummet $l^2(\mathbb{Z})$ är Hilbertrummet av alla komplexa följder $(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ (oändliga i båda riktningar), sådana att $\langle a, a \rangle < \infty$, där den inre produkten definieras av $\langle a, b \rangle := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}$. Vi har en linjär avbildning $T: E \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ som ges av $T(f) = (\dots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots)$, där c_n är de komplexa Fourierkoefficienterna för f . Parsevals identitet (för komplexa Fourierserier) säger att T är en *isometri*. Avbildningen T är däremot inte *unitär*, då den inte är surjektiv. Rummet E , som inte är ett Hilbertrum, kan däremot *kompletteras* till ett större funktionsrum $L^2([-\pi, \pi])$, som är ett Hilbertrum. Operatoren T kan (med hjälp av allmän teori för Hilbertrum) utökas unikt till en operator $\widehat{T}: L^2([-\pi, \pi]) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$, och denna operator är unitär. Detta visar att $L^2([-\pi, \pi])$ och $l^2(\mathbb{Z})$ är isomorfa som Hilbertrum.

SF1683 del 2, övning 6

Värmeledningsekvationen

Betrakta en smal stång med längden π , som är isolerad så att ingen värme kan spilla ut i ändarna. Då beskrivs temperaturen $y(x, t)$ i en punkt x på stängen vid tiden t av

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \infty), \\ \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(\pi, t) = 0, & t \in [0, \infty), \\ y(x, 0) = f(x), & x \in [0, \pi], \end{cases} \quad (1)$$

där $f(x)$ beskriver den initiala temperaturfördelningen i stängen.

Uppgift 1¹

Lös initialvärdesproblemet (1) i fallet $f(x) = \frac{1}{4}(|2x - \pi| - \pi)^2$.

Uppgift 2¹

Visa att den totala värmen i ett isolerat system som beskrivs av (1) bevaras, och alltså är samma som vid $t = 0$. Mer precist, visa att $\int_0^\pi y(x, t) dx = \int_0^\pi f(x) dx$ för alla $t \geq 0$.

Tentamen 2024-01-12, uppgift 3

Använd separation av variabler för att lösa värmeledningsproblemet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

för $u = u(x, t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$, med randvillkor

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

och initialvillkor

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 5, & 0 \leq x < \pi/4, \\ -2, & \pi/4 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Lösningen innehåller koefficienter för en Fourierserietutveckling. Ange integraler som ger dessa koefficienter. Integralerna behöver inte beräknas. Beräkna dock gränsvärdet $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ för $0 \leq x \leq \pi$.

¹Av Rasmus.

Annan uppgift 1¹

Lös följande initial-randvärdesproblem (som innefattar *vågekvationen*):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \infty), \\ y(0, t) = y(\pi, t) = 0, & t \in [0, \infty), \\ y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0, & x \in [0, \pi], \end{cases}$$

där

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi/4], \\ \frac{\pi}{2} - x, & x \in (\pi/4, \pi/2), \\ 0, & x \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Annan uppgift 2¹

Lös följande randvärdesproblem (som innefattar *Laplaceekvationen*):

$$\begin{cases} \Delta z(x, y) = 0, & (x, y) \in [-1, 1] \times [0, \pi], \\ z(1, y) = z(-1, y) = 1, & y \in [0, \pi], \\ z(x, 0) = z(x, \pi) = 0, & x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Annan uppgift 3¹

Under koordinatbytet $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, visa att Laplaceoperatorn $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ får formen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Annan uppgift 4¹

I polära koordinater, lös följande randvärdesproblem för Laplaceekvationen på enhetsdisken:

$$\begin{cases} \Delta z(r, \theta) = 0, & (r, \theta) \in [0, 1] \times [-\pi, \pi], \\ \frac{\partial z}{\partial r}(1, \theta) = g(\theta), & \theta \in [-\pi, \pi], \end{cases}$$

där

$$g(\theta) = \begin{cases} \theta^2, & \theta \in [0, \pi], \\ -\theta^2, & \theta \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Egen uppgift

Betrakta följande randvärdesproblem med periodiska randvillkor (som innefattar *Helmholtzekvationen*), där $k \in \mathbb{R}$ är en konstant:

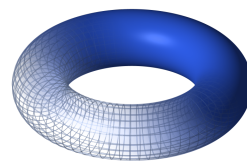
$$\begin{cases} \Delta f(x, y) = k f(x, y), & (x, y) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi], \\ f(-\pi, y) = f(\pi, y), & y \in [-\pi, \pi], \\ f(x, -\pi) = f(x, \pi), & x \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Bestäm för vilka värden på k finns det en icke-trivial lösning f på detta randvärdesproblem. För dessa värden på k , bestäm alla lösningar f som uppfyller

$$\iint_{[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]} f(x, y)^2 dA = 1.$$

Kommentar

Uppgiften svarar mot att hitta egenvärdena och egenfunktionerna till Laplaceoperatorn Δ på en *plan torus*,² som är ett rum som fås genom att i planet $\mathbb{R}^2$ identifiera punkter periodiskt, så att varje punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ identifieras ("klistras ihop") med $(x+2\pi, y)$ och $(x, y+2\pi)$. En plan torus kan inte bäddas in på ett sätt som bevarar avstånd i vår tredimensionella värld, men kan bäddas in i $\mathbb{R}^4$. Den kan däremot bäddas in i $\mathbb{R}^3$ på ett sätt som förvränger avstånd, som i bilden till höger. Den plana torusen är ett exempel på en sluten tvådimensionell Riemannmångfald. På sådana kan man definiera en (generaliserad) Laplaceoperator, och denna kan betraktas som en självadjungerad operator på ett lämpligt Hilbertrum av funktioner, i vilket den alltid har en Hilbertbas av egenfunktioner.



¹Av Rasmus.

²M. Levitin, D. Mangoubi, I. Polterovich, *Topics in Spectral Geometry*, avsnitt 1.2.2. Tillgänglig online: <https://michaellevitin.net/Book/TSG230529.pdf>.

Annan uppgift 1¹

Beräkna Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{a}, & 0 < x < a, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$$

där $a > 0$.

PZ 3.2.1c

Beräkna Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 2, & 1 < |x| < 2, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

PZ 3.2.1g

Om $b > 0$ är en konstant ges Fouriertransformen av funktionen

$$f_b(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq b, \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

av $\mathcal{F}[f_b](\omega) = \frac{\sin(b\omega)}{\pi\omega}$. Använd detta för att beräkna Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & |x| \leq \pi, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Annan uppgift 2¹

Hitta funktionen f som har Fouriertransform $\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{4+\omega^2}$.

PZ 3.3.1b

Beräkna Fouriertransformen av funktionen $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$.

Annan uppgift 3¹

Beräkna Fouriertransformen av funktionen $g(x) = e^{icx}f_b(ax)$, där f_b gavs i uppgift PZ 3.2.1g.

PZ 3.3.7

Antag att f har Fouriertransformen $\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$. Beräkna $\mathcal{F}[x^2f''(x) + 2f'''(x)](\omega)$.

PZ 3.3.4

Antag att f uppfyller differentialekvationen $f''(x) + 2xf'(x) + 2f(x) = 0$. Bestäm med hjälp av Fouriertransformen ett explicit uttryck för funktionen f .

PZ 3.3.6

Antag att f uppfyller

$$f''(x) + (x^2 - 2)f(x) = cf(x) \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R},$$

och att dess Fouriertransform $F = \mathcal{F}[f]$ uppfyller

$$F''(\omega) + (\omega^2 - 2)F(\omega) = cF(\omega) \quad \text{för alla } \omega \in \mathbb{R}.$$

Bestäm konstanten $c \in \mathbb{R}$.

¹Av Rasmus.

Fouriertransformen

Fouriertransformen $F(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)$ av en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ges av

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Den är definierad (för alla $\omega \in \mathbb{R}$) om $f \in G(\mathbb{R})$, där

$$G(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ är styckvis kontinuerlig och } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \right\}.$$

I det fallet är F kontinuerlig, och $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(\omega) = 0$.

Linjaritet

Precis som Laplacetransformen är Fouriertransformen linjär: om $a, b \in \mathbb{C}$ och $f, g \in G(\mathbb{R})$, gäller

$$\mathcal{F}[af + bg](\omega) = a\mathcal{F}[f](\omega) + b\mathcal{F}[g](\omega).$$

Förskjutningsformler

Antag att $f \in G(\mathbb{R})$, och $b, c \in \mathbb{R}$. Då gäller

$$\mathcal{F}[f(x+b)](\omega) = e^{ib\omega} \mathcal{F}[f(x)](\omega) \quad \text{och} \quad \mathcal{F}[e^{icx} f(x)](\omega) = \mathcal{F}[f(x)](\omega - c).$$

Deriveringsformler

Antag att $f \in G(\mathbb{R})$. Då gäller

$$\mathcal{F}[f'(x)](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f(x)](\omega) \quad \text{och} \quad \mathcal{F}[xf(x)](\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f(x)](\omega).$$

PZ 3.4.2f

Fouriertransformen av funktionen $g(x) = \cos(x)f_\pi(x)$, där

$$f_a(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

ges av

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{\omega \sin(\pi\omega)}{\pi(1 - \omega^2)}.$$

Använd detta för att bestämma värdet på integralen

$$\int_0^\infty \left(\frac{\omega \sin(\pi\omega)}{1 - \omega^2} \right)^2 d\omega.$$

PZ 3.4.2d

Bestäm värdet på integralen

$$\int_0^\infty \frac{\omega \sin(\pi\omega)}{1 - \omega^2} d\omega.$$

PZ 3.4.2e

Bestäm värdet på integralen

$$\int_0^\infty \frac{\omega \sin(\pi\omega)}{1 - \omega^2} \cos(\pi\omega) d\omega.$$

Inversa Fouriertransformen

Den inversa Fouriertransformen av en funktion $F(\omega)$ definieras enligt

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x) = \int_{-\infty}^\infty F(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Om $f \in G(\mathbb{R})$, gäller

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Relation mellan Fouriertransformen och inversa Fouriertransformen

Om $f \in G(\mathbb{R})$, gäller

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = 2\pi \mathcal{F}[f](-x).$$

Speciellt är

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](x) = \frac{f((-x)+) + f((-x)-)}{4\pi},$$

vilket är lika med $\frac{f(x)}{2\pi}$ om f är kontinuerlig i punkten $-x$.

Plancherels formel

För Fouriertransformen finns en formel som påminner om Parsevals formel för Fourierserier, nämligen Plancherels formel:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |\mathcal{F}[f](\omega)|^2 d\omega.$$

Precis som för Parsevals formel finns en generaliserad version:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}[f](\omega) \overline{\mathcal{F}[g](\omega)} d\omega,$$

som blir den första formeln när $f = g$. Båda formler gäller under antagandet att $f, g \in G(\mathbb{R})$.

Här kan det eventuellt tillkomma anteckningar om det vi pratade om på övning 9 efter att ha gått igenom alla uppgifterna på förra sidan.

PZ 3.8.4ab

För funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

bestäm Fouriertransformen $\mathcal{F}[f](\omega)$, samt faltningen $(f * f)(x)$. Använd resultatet för att beräkna integralerna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx.$$

PZ 3.8.5bc

Bestäm Fouriertransformen av funktionen

$$g_a(x) = \frac{2a}{x^2 + a^2},$$

där $a > 0$ är en konstant. Om möjligt, hitta en funktion $\phi \in G(\mathbb{R})$ sådan att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{(x-t)^2 + 16} dt = \frac{1}{x^2 + 49}.$$

Om detta är omöjligt, förklara varför.

Annan uppgift¹

Härled den allmänna lösningen (i termer av funktionen f) till följande problem² som innefattar Laplaceekvationen på övre halvplanet:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in (-\infty, \infty) \times (0, \infty), \\ z(x, 0) = f(x), & x \in (-\infty, \infty), \\ \lim_{y \rightarrow \infty} z(x, y) = 0, & x \in (-\infty, \infty), \end{cases}$$

där vi antar att $f \in G(\mathbb{R})$, och söker en lösning z som är begränsad på övre halvplanet. Det går bra att utan vidare³ anta att det går att byta ordning på gränsvärdet och Fouriertransformation, det vill säga att

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \mathcal{F}_x[z(x, y)](\omega) = \mathcal{F}_x \left[\lim_{y \rightarrow \infty} z(x, y) \right] (\omega) = 0.$$

Faltning

För två funktioner $f, g \in G(\mathbb{R})$ definierar vi deras så kallade *faltning* $f * g$ enligt

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy,$$

och det går då att visa att $f * g \in G(\mathbb{R})$. Notera att det är samma formel som för faltningen som förekommer i sammanhang med Laplacetransformen, förutom att integralen är över hela $\mathbb{R}$ istället för intervallet $[0, x]$.

Precis som för Laplacetransformen finns det en formel för Fouriertransformen av en faltning av två funktioner:

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = 2\pi \mathcal{F}[f](\omega) \mathcal{F}[g](\omega).$$

¹Av Rasmus.

²Notera att det sista villkoret kan ses som ett randvillkor "vid oändligheten".

³Det går att visa att lösningen på problemet är entydig, när man väl har fått fram lösningen visar det sig att detta är rättfärdigat. Att visa att lösningen är entydig är något överkurs, men går ungefär till så här: om z_1 och z_2 är två lösningar på problemet är differensen $z := z_1 - z_2$ en lösning på problemet med homogent randvillkor vid $y = 0$, det vill säga för $f = 0$. Om vi ser övre halvplanet som övre halvan av det komplexa talplanet $\mathbb{C}$ kan vi (på grund av att z är harmonisk) hitta en *analytisk* (*holomorf*) funktion $u(\zeta)$ på övre halvplanet $\{\zeta \mid \operatorname{Im} \zeta > 0\}$ som uppfyller $\operatorname{Im}(u) = z$. Det homogena randvillkoret tillsammans med *Schwarz reflektionsprincip* medför att u går att utöka till en analytisk funktion på hela $\mathbb{C}$ som uppfyller $u(\bar{\zeta}) = \overline{u(\zeta)}$. Funktionen $v(\zeta) = e^{-iu(\zeta)}$ blir då analytisk på hela $\mathbb{C}$ och eftersom $|v(x + iy)| = e^{z(x, y)}$, är v begränsad. *Liouvilles sats* ger nu att v , och därmed z , är konstant. Randvillkoret $z(x, 0) = 0$ ger slutligen att z är identiskt noll.

Dirichlets sats

Låt E vara rummet av alla styckvis kontinuerliga funktioner $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$. För en funktion $f \in E$ och en punkt $x \in [-\pi, \pi]$ definierar vi

$$f(x+) = \lim_{t \searrow x} f(t) \quad \text{och} \quad f(x-) = \lim_{t \nearrow x} f(t),$$

i de fall där det är väldefinierat. Vi definierar även partialsummorna

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \sum_{n=-m}^m c_n e^{inx},$$

där a_n och b_n är koefficienterna i den reella Fourierserien till f , och c_n är de komplexa Fourierkoefficienterna.

Antag nu att $f \in E$, och att gränsvärdena $\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h)-f(x+)}{h}$ och $\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x+h)-f(x-)}{h}$ existerar (och är ändliga) för varje x . Dirichlets sats säger då att för $x \in (-\pi, \pi)$, så är

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

och säger dessutom att

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(-\pi) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(\pi) = \frac{f(\pi-) + f((-\pi)+)}{2}.$$

Bevis av Dirichlets sats

Begränsa f till intervallet $(-\pi, \pi]$ och utöka sen 2π -periodiskt till en funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; detta påverkar varken värdena på c_n eller värdena $f(x+)$ och $f(x-)$ för något x . Dessutom kan påståendet för $x = \pm\pi$ formuleras på ett sätt som är identiskt för påståendet vid alla andra punkter, så det räcker att visa att $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ för alla x , eller ekvivalent, att $\lim_{m \rightarrow \infty} (S_m(x) - \frac{f(x+)+f(x-)}{2}) = 0$.

Steg 1

De komplexa Fourierkoefficienterna för f ges av

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy.$$

Om vi definierar *Dirichletkärnan* D_m enligt

$$D_m(y) = \frac{1}{2} \sum_{n=-m}^m e^{iny},$$

ser vi att D_m är jämn, och att

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-m}^m \int_{-\pi}^{\pi} e^{in(x-y)} f(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(x-y) f(y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(y) f(x-y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(y) f(x+y) dy, \end{aligned}$$

Steg 2

Vi har

$$\begin{aligned} D_m(y) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^m e^{iny} + e^{-iy} \sum_{n=0}^{m-1} e^{-iny} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{i(m+1)y}}{1 - e^{iy}} + e^{-iy} \cdot \frac{1 - e^{-imy}}{1 - e^{-iy}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{i(m+1)y}}{1 - e^{iy}} + \frac{1 - e^{-imy}}{e^{iy} - 1} \right) = \frac{e^{-imy} - e^{i(m+1)y}}{2(1 - e^{iy})} \end{aligned}$$

Det följer dessutom direkt ur definitionen av D_m att

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} D_m(y) dy = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-m}^m \int_0^{\pi} e^{iny} dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 dy + \sum_{n=1}^m \int_0^{\pi} (e^{iny} + e^{-iny}) dy \right) = \frac{1}{\pi} (\pi + 0) = 1,$$

och samma sak gäller förstås om man istället integrerar från $-\pi$ till 0, då D_m är jämn.

Steg 3

Vi har

$$\begin{aligned} S_m(x) - f(x+) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(x+y) - f(x+)) D_m(y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+y) - f(x+)}{1 - e^{iy}} e^{-imy} dy + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+y) - f(x+)}{1 - e^{iy}} e^{i(m+1)y} dy, \end{aligned}$$

och på samma sätt fås att

$$S_m(x) - f(x-) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+y) - f(x-)}{1 - e^{iy}} e^{-imy} dy + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+y) - f(x-)}{1 - e^{iy}} e^{i(m+1)y} dy$$

Om vi definierar

$$g(y) = \begin{cases} \frac{f(x+y) - f(x-)}{1 - e^{iy}}, & -\pi \leq y < 0, \\ 0, & y = 0, \\ \frac{f(x+y) - f(x+)}{1 - e^{iy}}, & 0 < y \leq \pi, \end{cases}$$

följer det att

$$S_m(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi g(y) e^{-imy} dy + \frac{1}{2\pi} g(y) e^{i(m+1)y} dy = d_m + d_{-(m+1)},$$

där d_n är de komplexa Fourierkoefficienterna för g . Eftersom $f \in E$, följer det att $g(y+)$ och $g(y-)$ existerar och är ändliga för alla $y \neq 0$. Vi har också

$$g(0+) = \lim_{y \searrow 0} \frac{f(x+y) - f(x+)}{1 - e^{iy}} = \lim_{y \searrow 0} \left(\frac{f(x+y) - f(x+)}{y} \cdot \frac{y}{1 - e^{iy}} \right) = i \cdot \lim_{y \searrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y},$$

där vi i sista likheten använde l'Hôpitals regel för gränsvärdet av $y/(1 - e^{iy})$. Enligt vårt antagande om f betyder detta att $g(0+)$ existerar och är ändligt, och på samma sätt fås att $g(0-)$ existerar och är ändligt, vilket betyder att $g \in E$.

Från Riemann–Lebesgues lemma följer det att $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} d_n = 0$, så att

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(S_m(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right) = 0.$$

Alternativt sätt att göra steg 3

Ett alternativt sätt att göra steg 3 i beviset är att förlänga uttrycket för $D_m(y)$ med $e^{-iy/2}$ för att få

$$\begin{aligned} D_m(y) &= \frac{e^{-i(m+1/2)y} - e^{i(m+1/2)y}}{2(e^{-iy/2} - e^{iy/2})} = \frac{\sin((m+1/2)y)}{2\sin(y/2)} = \frac{\sin(y/2)\cos(my) + \cos(y/2)\sin(my)}{2\sin(y/2)} \\ &= \frac{1}{2}\cos(my) + \frac{\cos(y/2)}{2\sin(y/2)}\sin(my), \end{aligned}$$

och på liknande sätt som ovan se att $S_m(x)$ ges som en summa av cosinuskoefficienter för f och sinuskoefficienter för funktionen

$$h(y) = \begin{cases} \frac{\cos(y/2)}{2\sin(y/2)}(f(x+y) - f(x-)), & -\pi \leq y < 0, \\ 0, & y = 0, \\ \frac{\cos(y/2)}{2\sin(y/2)}(f(x+y) - f(x+)), & 0 < y \leq \pi. \end{cases}$$

Med ett snarlikt resonemang ser man att $h \in E$ och Riemann–Lebesgues lemma ger att koefficienterna i uttrycket för $S_m(x)$ går mot noll då $m \rightarrow \infty$.