

SF1671, övning 1

EXERCISES P.1

In Exercises 3–4, express the given repeating decimal as a quotient of integers in lowest terms.

4. $3.2\overline{7}$

20. $\frac{x+1}{x} \geq 2$

Solve the equations in Exercises 27–32.

32. $\left| \frac{s}{2} - 1 \right| = 1$

In Exercises 13–26, solve the given inequality, giving the solution set as an interval or union of intervals.

EXERCISES P.2

In Exercises 21–24, write an equation for the line through the two points.

22. $(-2, 1), (2, -2)$

35. **(Two-intercept equations)** If a line is neither horizontal nor vertical and does not pass through the origin, show that its equation can be written in the form $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, where a is its x -intercept and b is its y -intercept.

F1 — Grundläggande terminologi och begrepp, ekvationer och olikheter, absolutbelopp

Fler uppgifter:

(1) Ange alla ekvivalenser/implikationer mellan följande utsagor.

$$A: x^2 < 9, \quad B: x > -3, \quad C: -3 < x < 3. \quad (\mathbf{E})$$

(2) Ange alla ekvivalenser/implikationer mellan följande utsagor för $x, y \in \mathbb{R}$.

$$A: x = y, \quad B: x^2 = y^2, \quad C: xy = x^2, \quad D: xy = y^2. \quad (\mathbf{E})$$

$$(6) \text{ Lös ekvationen } |x + 1| + |2x - 6| = 10. \quad (\mathbf{E})$$

SF1671, övning 3

EXERCISES P.4

In Exercises 1–6, find the domain and range of each function.

4. $F(x) = 1/(x - 1)$

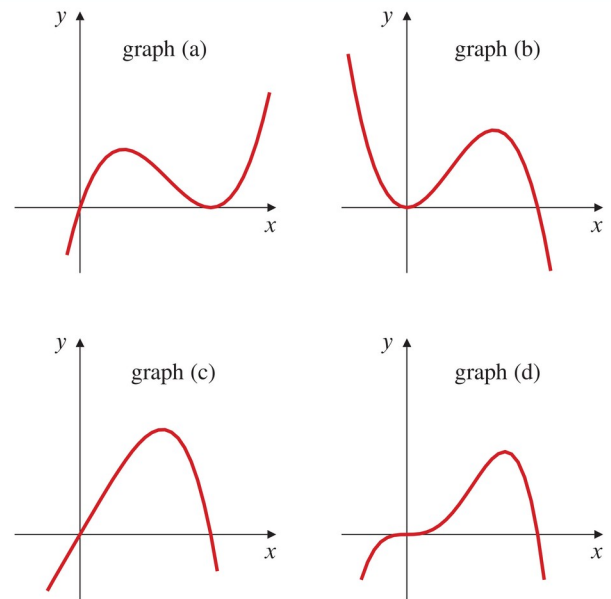


Figure P.57

8. Figure P.57 shows the graphs of the functions: (i) $x - x^4$, (ii) $x^3 - x^4$, (iii) $x(1 - x)^2$, (iv) $x^2 - x^3$. Which graph corresponds to which function?

In Exercises 11–22, what (if any) symmetry does the graph of f possess? In particular, is f even or odd?

14. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

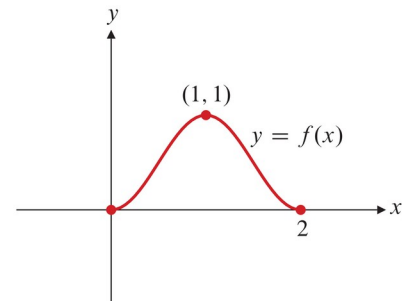


Figure P.58

In Exercises 39–46, f refers to the function with domain $[0, 2]$ and range $[0, 1]$, whose graph is shown in Figure P.58. Sketch the graphs of the indicated functions and specify their domains and ranges.

40. $f(x) - 1$

(4) Lös ekvationen $(3 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{x}) = 8\sqrt{x}$.

(E)

EXERCISES P.5

In Exercises 1–2, find the domains of the functions $f + g$, $f - g$, fg , f/g , and g/f , and give formulas for their values.

2. $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = \sqrt{1+x}$

In Exercises 19–24, f refers to the function with domain $[0, 2]$ and range $[0, 1]$, whose graph is shown in Figure P.65. Sketch the graphs of the indicated functions, and specify their domains and ranges.

22. $f(x/3)$

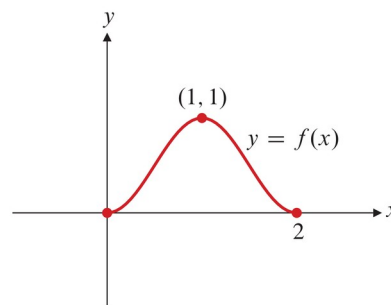


Figure P.65

33. Assume that f is an even function, g is an odd function, and both f and g are defined on the whole real line $\mathbb{R}$. Is each of the following functions even, odd, or neither?

$$f + g, \quad fg, \quad f/g, \quad g/f, \quad f^2 = ff, \quad g^2 = gg$$

$$f \circ g, \quad g \circ f, \quad f \circ f, \quad g \circ g$$

EXERCISES 3.1

Show that the functions f in Exercises 1–12 are one-to-one, and calculate the inverse functions f^{-1} . Specify the domains and ranges of f and f^{-1} .

6. $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

12. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

In Exercises 13–20, f is a one-to-one function with inverse f^{-1} . Calculate the inverses of the given functions in terms of f^{-1} .

14. $h(x) = f(2x)$

In Exercises 21–23, show that the given function is one-to-one and find its inverse.

22. $g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{if } x \geq 0 \\ x^{1/3} & \text{if } x < 0 \end{cases}$

SF1671, övning 4

EXERCISES P.7

Find the values of the quantities in Exercises 1–6 using various formulas presented in this section. Do not use tables or a calculator.

6. $\sin \frac{11\pi}{12}$

In Exercises 13–16, prove the given identities.

14. $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$

52. Observers at positions A and B 2 km apart simultaneously measure the angle of elevation of a weather balloon to be 40° and 70° , respectively. If the balloon is directly above a point on the line segment between A and B , find the height of the balloon.

53. Show that the area of triangle ABC is given by $(1/2)ab \sin C = (1/2)bc \sin A = (1/2)ca \sin B$.

EXERCISES 3.2

Simplify the expressions in Exercises 1–18.

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^x 4^{x/2}$

6. $\log_4 \left(\frac{1}{8}\right)$

8. $2^{\log_4 8}$

30. Solve $2 \log_3 x + \log_9 x = 10$ for x .

16. $2 \log_3 12 - 4 \log_3 6$

EXERCISES 3.3

Simplify the expressions given in Exercises 1–10.

2. $\ln(e^{1/2} e^{2/3})$

Solve the equations in Exercises 11–14 for x .

12. $3^x = 9^{1-x}$

Solve the inequalities in Exercises 17–18.

18. $\ln(x^2 - 2) \leq \ln x$

(1) Man vet att $\sin x = \frac{2}{3}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Bestäm det exakta värdet av

$$\frac{3 \cos x - \cot x}{3 \sin x + \tan x}.$$

(C)

(2) Avgör om det för alla $x > 0$ gäller att

$$-\frac{x}{2} + \ln x = \ln \left(x(\sqrt{1+e^x} - \sqrt{e^x}) \right) + \ln(\sqrt{1+e^{-x}} + 1).$$

(A)

SF1671, övning 5

C 3.5

In Exercises 1–12, evaluate the given expression.

2. $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$

6. $\cos(\sin^{-1} 0.7)$

10. $\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)\right)$

12. $\tan(\tan^{-1} 200)$

In Exercises 13–18, simplify the given expression.

14. $\cos(\sin^{-1} x)$

C 3.6

2. Verify the addition formulas

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

Proceed by expanding the right-hand side of each identity in terms of exponentials. Find similar formulas for $\cosh(x - y)$ and $\sinh(x - y)$.

Extra (1)

Vinkeln v är spetsig och $\cos 2v = -1/9$. Bestäm exakt värdet av $\cos v$.

Extra (4)

Lös ekvationen $\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Extra (5)

Om $2 \cos(x + \frac{\pi}{6}) = 1$, vilka värden kan då $\sin x$ anta?

SF1671, övning 6

DM 2.4

Räkna upp elementen i mängden

$$\{n \mid n \text{ är ett positivt udda tal mindre än } 10\}.$$

DM 2.7

Anta att vi upptäckt dels att $A \subseteq B$ och dels att $B \subseteq A$. Vad kan vi dra för slutsatser om förhållandet mellan A och B ?

DM 2.12

Låt universum $\mathcal{U}$ bestå av siffrorna från noll till nio. Bilda mängderna $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ och $B = \{5, 7, 9\}$. Vilka av följande påståenden är sanna?

- (a) $B \not\subseteq A$
- (b) $3 \in B$
- (c) $7 \notin B$
- (d) $|B| = 3$

DM 2.16

- (a) Uttryck betydelsen i $A \setminus B$ med hjälp av mängdbyggaren.
- (b) Illustrera vad som menas i ett venndiagram.
- (c) Det går att uttrycka $A \setminus B$ med hjälp av de andra räknesätten. Gör det!

DM 2.21

- (a) Illustrera de distributiva lagarna med venndiagram.
- (b) Skriv formella bevis för lagarna.

DM 2.26

Ett register över avställda bilar innehåller 1812 poster. Ett register över bilar som har automatfotograferats vid fortkörning innehåller 1066 poster. Tillsammans innehåller de båda registren 2001 poster. Hur många bilar som egentligen är registrerade som avställda har ändå noterats vid fortkörning?

Extra (1)

Hur många element innehåller mängden $\{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$?

Extra (2)

Mängderna A , B , C ges av $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 4, 7\}$, $C = \{1, 2, 4\}$.

- (a) Ange mängderna $A \cup B$, $B \cap C$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $\mathcal{P}(C)$, $C \times B$.
- (b) Avgör vilka av följande påståenden som är sanna och vilka som är falska: $C \subseteq A \cap B$, $C \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$, $C \times B \subseteq A \times B$. Motivera.

Extra (4)

Visa, dels med räkneregler på sidan 20 i läroboken (DM) och dels med ett Venndiagram, att för godtyckliga mängder A, B gäller

$$((A^c \cup B^c) \setminus A)^c = A.$$

Minns att $M \setminus N$ kan uttryckas som $M \cap N^c$.

Extra (7)

Vad är $|\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\})|$ och $|\mathcal{P}(\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\})|$? Ange alla element i $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\})$ och i $\mathcal{P}(\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\})$.

Egen uppgift

Låt $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ vara en ändlig mängd med n element.

- (a) Antag att vi har valt ut m olika delmängder av A :

$$B = \{A_1, \dots, A_m\},$$

där $m \leq n$. Definiera en ny delmängd $C \subseteq A$ enligt

$$C := \{a_k \mid 1 \leq k \leq m \text{ och } a_k \notin A_k\}.$$

Visa att $C \notin B$.

Ledning: För varje k , hitta ett element som är med i A_k men inte i C , eller vice versa, och dra slutsatsen att $A_k \neq C$.

- (b) Använd resultatet i (a) för att visa att $|\mathcal{P}(A)| > |A|$.

SF1671, övning 7

DM 2.32

Rita ett Hassediagram för potensmängden $\mathcal{P}(A)$ till en mängd A med två element.

DM 2.40

Beskriv de mängder som ges av $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ och $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

DM 2.45

Vad är egentligen $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ för något, och har du arbetat med den mängden någon gång?

DM 8.4

Rita grafen och matrisen till relationen $\mathcal{R} = \{(a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (c, c), (d, b), (d, e)\}$.

DM 8.24

Avgör om $\mathcal{R}_1 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, e), (d, c), (d, d)\}$ respektive $\mathcal{R}_2 = \{(a, b), (a, c), (a, e), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, e), (d, c), (d, d), (e, e)\}$ är transitiva.

DM 8.25

Skriv på svenska vad det skulle innebära om relationen kär-i var

- (a) reflexiv.
- (b) symmetrisk
- (c) anti-symmetrisk
- (d) transitiv.

Extra (2)

För vilka mängder av människor gäller att relationen "är syster till" är symmetrisk?

Extra (5)

Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och $X = \{B \subseteq A \mid 1 \in B \text{ eller } 2 \in B\}$. Visa att relationen $\subseteq$ på X är en partialordning. Finn alla minimala, minsta, maximala och största element i X med denna ordning.

Extra (6)

Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, och låt

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4), (5, 2), (5, 5)\}$$

vara en relation på A . Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation och bestäm ekvivalensklasserna.

Egen uppgift

En relation $\mathcal{R}$ på en mängd A kallas för en *välgrundad* relation om det för varje icke-tom delmängd $S \subseteq A$ finns ett element $m \in S$ sådant att $m\mathcal{R}s$ (det vill säga att $(m, s) \in \mathcal{R}$) för alla $s \in S$.

En *totalordning* på en mängd A är (definieras som) en partialordning $\leq$ som också uppfyller att det för alla $x, y \in A$ gäller antingen att $x \leq y$ eller $y \leq x$.

En *välordning* på A är en totalordning som också är välgrundad.

- (a) Visa att en välgrundad partialordning automatiskt är en välordning.
- (b) Visa att en totalordning på en *ändlig* mängd automatiskt är en välordning.
- (c) Ge ett exempel på en totalordning som inte är en välordning.

SF1671, övning 8

DM 3.9

Primfaktorisera 60, 61, 62, 63 och 64.

DM 3.15

Använd Euklides algoritm på talen 100 och 70, för att kontrollera att den verkligen tar fram 10 (som man ser är den största gemensamma delaren).

DM 3.16

Talen 100 och 70 har största gemensamma delare 10. Uttryck 10 som linjärkombination av 100 och 70.

DM 3.46

Konvertera det binära talet 101010 till decimal notation och det decimala talet 101 till binär. Konvertera sedan tillbaka talen till ursprungsnotationen och kontrollera att det blir det du startade med.

Extra (1b)

Beräkna i bas 2:

$$k + l \quad \text{och} \quad m \cdot n,$$

där

$$k = (218)_{10}, \quad l = (137)_{10}, \quad m = (89)_{10}, \quad n = (43)_{10}.$$

Kontrollera additionerna med subtraktion.

Kontrollera slutligen resultaten genom att konvertera svaret till bas 10.

Extra (3)

Tag ett tresiffrigt tal m , där första och sista siffran i m är olika. Bilda ett nytt tal n genom att ta m 's siffror i omvänd ordning (så att t.ex. $m = 385$ ger $n = 583$).

Låt p vara $m - n$ om $m > n$, annars $n - m$. Bilda nu q genom att ta p 's tre siffror i omvänd ordning (så t.ex. $p = 198$ ger $q = 891$ och $p = 99$ ger $q = 990$).

Varför är $p + q = 1089$, oberoende av valet av m ?

Vad blir resultatet om man räknar i bas t ?

Extra (4)

Visa att $x|0$ för alla $x \in \mathbb{Z}$, men $0|x$ om och endast om $x = 0$. Här utgår vi från den definition av delbarhet som gavs på föreläsningen, dvs för heltal a, b gäller att $a|b$ om det finns $q \in \mathbb{Z}$ så att $b = aq$.

Extra (7)

Låt k vara ett heltal. Visa att $3k + 2$ och $5k + 3$ är relativt prima, dvs att $\text{sgd}(3k + 2, 5k + 3) = 1$.

Egen uppgift

Vi kan introducera en relation $\mathcal{R}$ på $\mathbb{N}$ genom att definiera att $(a, b) \in \mathcal{R}$ om och endast om $a|b$.

- (a) Visa att denna relation är en partialordning.
- (b) Vilka är de minsta, minimala, största och maximala elementen för $\mathbb{N}$ under denna partialordning?
- (c) Vilka är de minsta, minimala, största och maximala elementen för delmängden $\mathbb{N} \setminus \{1\} \subseteq \mathbb{N}$?

SF1671, övning 9

DM 3.19a

Hitta gcd och lcm för 408 och 672, och skriv gcd som linjärkombination av talen på minst två olika sätt.

DM 3.22

Det finns en sats som säger att om ett primtal p delar en produkt ab måste det dela någon av faktorerna i produkten.

1. Hitta tre tal p , a och b , där p inte är ett primtal och där slutdelen i satsen inte heller gäller.
2. Hitta tre tal p , a och b , där p inte är ett primtal men där slutdelen av satsen gäller i allfall.

DM 3.26a

Lös den diofantiska ekvationen $8x + 9y = 3$.

Extra (7)

Använd aritmetikens fundamentalsats för att visa att om för $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$ gäller att $a^2 = b \cdot c^2$ så måste b vara en perfekt kvadrat.

Extra (8)

Visa att för alla heltal n gäller att $6 \mid n^5 + 5n$.

SF1671, övning 10

DM 3.31

Beräkna $27 \cdot 35 \pmod{12}$ på samma sätt som i exemplet nedan, på alla tre sätten. Vilket var här enklast och vilket var krångligast? (Använd inte räknare!)

Exempel från DM

Vi vill addera 27 och 35 modulo 12. Vi kan antingen börja med att addera talen och sedan reducera modulärt

$$27 + 35 = 62 = 5 \cdot 12 + 2 \equiv 2 \pmod{12}$$

eller först reducera modulärt, därefter addera, och sedan reducera igen

$$27 + 35 = (2 \cdot 12 + 3) + (2 \cdot 12 + 11) \equiv 3 + 11 = 14 = 1 \cdot 12 + 2 \equiv 2 \pmod{12}$$

Fördelen med den här varianten var att vi fick mindre siffror att räkna med, nackdelen var att vi fick reducera modulärt flera gånger. Vi skulle också kunna göra så här:

$$27 + 35 = (2 \cdot 12 + 3) + (3 \cdot 12 - 1) \equiv 3 + (-1) = 2 \pmod{12}$$

Det är fullt tillåtet att i mellanresultat gå över till negativa tal. Vi fick här lättare tal att räkna med, och på köpet slapp vi slutreduktionen. Angående notationen: Vi har använt vanligt "=" vid samband som gäller även vid normal räkning, och " $\equiv$ " vid de som bara gäller då man räknar modulärt. Vanligen reducerar man alla mellanresultat vid moduloberäkningar, så att man får små tal att arbeta med. Men hur vi än lägger upp räkningarna har kommer vi att få samma slutresultat: 2. Och på precis samma sätt räknar man med subtraktion och multiplikation.

DM 3.38abc

Lös ekvationen $8x = 10$

(a) i $\mathbb{Z}_{14}$

(b) i $\mathbb{Z}_{15}$

(c) i $\mathbb{Z}_{16}$

DM 3.43

I "normal" räkning finns den viktiga räkneregeln nollfaktorlagen. Den säger att om en produkt är noll så måste någon av faktorerna vara noll; det går inte att multiplicera fram noll på annat sätt. Tittar man i multiplikationstabellerna i Figur 1 ser man att detta inte är givet i modulär aritmetik.

- (a) I tabellen för $\mathbb{Z}_6$ finns ett antal nolldelare, det vill säga tal andra än noll som kan vara faktorer i noll. Förklara varför det alltid finns nolldelare om man räknar modulo ett sammansatt tal.
- (b) I tabellen för $\mathbb{Z}_7$ finns däremot bara nollor i nollans rad och kolumn. Förklara varför det inte kan finnas nolldelare då man räknar modulo ett primtal.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Figur 1: Multiplikationstabeller för $\mathbb{Z}_6$ och $\mathbb{Z}_7$

DM 3.63

- Skriv upp additions- och multiplikationstabellen för $\mathbb{Z}_8$.
- Vilka tal har en invers, och vad är inversen?
- Hur många lösningar har ekvationen $x^2 = 1$?
- Har du några kommentarer till svaret på föregående uppgift?

Extra (1)

Finn alla heltal x så att $16x \equiv 26 \pmod{42}$.

Extra (3a)

Vad är sista siffran (i bas tio) för talet 3^{22} ?

Extra (5)

Visa att om heltalen x, y, z uppfyller $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ så är $x = y = z = 0$.

Egen uppgift

Antag att p är ett primtal, och låt $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$.

- Visa att a är inverterbart i $\mathbb{Z}_p$.
- Visa att funktionen $f : \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ som ges av $f(x) = a \cdot x$ är bijektiv.
- Visa att

$$(a \cdot 1) \cdot (a \cdot 2) \cdot \dots \cdot (a \cdot (p-2)) \cdot (a \cdot (p-1)) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-2) \cdot (p-1)$$

gäller i $\mathbb{Z}_p$, och förklara varför detta ger att $a^{p-1} = 1$ i $\mathbb{Z}_p$.

- Visa att $a \equiv a^p \pmod{p}$ gäller för alla $a \in \mathbb{Z}$. Detta resultat kallas ibland för *Fermats lilla sats*.

SF1671, övning 11

DM 2.41

Med $2\mathbb{Z}$ menas mängden $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Beskriv i ord de mängder som ges av $2\mathbb{Z}$ och $\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$.

DM 2.47

Visa att mängden $A = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ och $B = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ har samma kardinalitet genom att skapa en bijektion mellan dem. Försök hitta någon som är lätt att beskriva!
Anmärkning: Elementen i mängden A kallas binära strängar av längd 3.

DM 2.48

Visa att mängden jämna heltal är uppräkneligt oändlig, genom att konstruera en bijektion från $\mathbb{N}$.

DM 8.41

- (a) Är $f(x) = x^3$ injektiv om man räknar i $\mathbb{Z}_7$?
- (b) Är "kubikrot" ett meningsfullt begrepp i $\mathbb{Z}_7$?

Extra (1ab)

Avgör om sambandet $f(x) = x^2$ definierar en injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar funktion i följande fall

- (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- (b) $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$,

Här betecknar $\mathbb{R}_{\geq 0}$ de icke-negativa reella talen $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Extra (2a)

Är $f: \mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_9$ injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar då $f(x) = x^3 + 3x + 7$?

Extra (3)

Avgör om $f: \mathbb{Z}_{4711} \rightarrow \mathbb{Z}_{4711}$, $f(x) = 1632x + 1792$ är injektiv, surjektiv, bijektiv och/eller inverterbar.

Extra (5)

Ge exempel på mängder X, Y, Z och funktioner $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, så att sammansättningen $g \circ f: X \rightarrow Z$ är en bijektion, trots att varken f eller g är det.
Lite svårare: Samma uppgift, men med kravet att $X = Y = Z$.



Figur 2: Mängderna C_n , för $n = 0, 1, \dots, 6$.

Egen uppgift

Låt A vara en mängd.

- Finns det någon injektion (injektiv funktion) $f : A \hookrightarrow \mathcal{P}(A)$?
- Finns det någon surjektion (surjektiv funktion) $f : A \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A)$?
Ledning: Tillhör $B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \subseteq A$ värdemängden för f ?
- Visa att $|\mathcal{P}(A)| \neq |A|$.
- Betrakta det slutna intervallet $C_0 = [0, 1]$. Om vi tar bort den mittersta tredjedelen av intervallet, där den del som tas bort är ett öppet intervall, får vi en union av två slutna intervall,

$$C_1 = C_0 \setminus (1/3, 2/3) = [0, 1/3] \cup [2/3, 1].$$

Motsvarande kan upprepas på varje del av C_1 , vilket resulterar i en union av fyra slutna intervall,

$$\begin{aligned} C_2 &= ([0, 1/3] \setminus (1/9, 2/9)) \cup ([2/3, 1] \setminus (7/9, 8/9)) \\ &= [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]. \end{aligned}$$

Genom att upprepa denna process får vi mängder C_n , där C_n är en union av 2^n stycken slutna intervall som fås genom att ta bort den mittersta tredjedelen (som tolkas som ett öppet intervall) på varje slutet intervall som C_{n-1} består av, se Figur 2. Snittet $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ kallas för *Cantormängden*. Notera att $C \subseteq \mathbb{R}$.

Visa att det finns en injektion $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \hookrightarrow C$, och därmed en injektion $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathbb{R}$.

Ledning: Låt $A \subseteq \mathbb{N}$, och definiera $d_k = 0$ för de värden på k där $k \notin A$, och $d_k = 2$ för de k där $k \in A$. I basen tre definierar detta ett tal $x = (0, d_0 d_1 d_2 d_3 \dots)_{\text{tre}}$. Om vi för varje $A \subseteq \mathbb{N}$ kallar det resulterande talet x för $g(A)$ definierar detta en funktion $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$. Visa att $g(A) \in C$ för alla $A \subseteq \mathbb{N}$, och visa att om $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{N}$ och $A_1 \neq A_2$, så finns ett k sådant att $g(A_1)$ och $g(A_2)$ ligger i olika delintervall i C_k .

- Visa med hjälp av resultaten från (c) och (d) att $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

Ledning: Antag att det existerar en bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$, och visa att detta leder till att $|\mathbb{N}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

SF1671, övning 12

DM 4.9

Man kan konstruera Graykod med n binära siffror med hjälp av en rekursiv algoritm.

- (a) För $n = 1$ ser koden ut som $\{0, 1\}$.
- (b) För högre värden på n : Skriv upp koden för $n - 1$ två gånger efter varandra, den andra gången baklänges. Lägg på en nolla först på varje kodord i den första omgången och lägg på en etta först på varje kodord i den andra omgången.

Konstruera Graykoden för $n = 3$.

DM 4.11a

Skriv ut alla termerna i summan

$$\sum_{k=3}^7 (-k)^3.$$

DM 4.12a

Skriv följande summa med summatecken:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

DM 4.13a

Skriv om följande summering, så att den startar i noll:

$$\sum_{i=3}^7 i^4.$$

DM 4.16

Vi har det oktala talet 3333333333. Vad blir det decimalt?

DM 4.20

En talföljd definieras enligt $a_0 = 1, a_1 = 9, a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ då $n \geq 2$. Visa att talen i följden kan beräknas med formeln $a_n = (1 + 2n)3^n$.

Extra (2a)

Beräkna $4 + 8 + 12 + \dots + 36 + 40$.

Extra (3ab)

Summera

(a) $\sum_{i=k}^n 3$

(b) $\sum_{i=0}^{10} 3 \cdot 5^i$

Extra (5) (gammal tentauppgift)

Summan av de två första termerna i en geometrisk talföljd är 10, och summan av de tre första termerna är 19. Bestäm talföljden (eller talföljderna om det kan finnas flera).

SF1671, övning 13

DM 4.23

Visa att $4^{2n} - 1$ är delbart med 15 för alla heltal $n \geq 1$. (Tips: Ett tal som är jämnt delbart med 15 kan skrivas $m \cdot 15$, där m är ett heltal.)

DM 4.33

Visa att talen i den rekursiva talföljden $a_0 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 1$ uppfyller olikheten $a_n > 3^n$.

DM 4.50

En talföljd definieras enligt

$$\begin{cases} a_1 = 32, \\ a_2 = 38, \\ a_3 = 206, \\ a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}, n > 3. \end{cases}$$

Bevisa att talen i talföljden kan beräknas med formeln $a_n = 4 - 5(-2)^n + 6 \cdot 3^n$.

DM 4.62

Minns att fibonaccitalen f_n definierades enligt $f_1 = f_2 = 1$ och $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ för $n \geq 1$. Visa att fibonaccitalen kan beräknas med formeln

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$



Figur 3: En fyralagers pyramid av träkulor.

DM 4.54

Om man vill bygga en ”pyramid” (egentligen tetraeder) av stenkulor så brukar översta lagret bestå av en enda kula. Lagret under innehåller tre kulor, lagda i trekant, så en tvålayers pyramid innehåller fyra kulor. Figur 3 visar en fyralagers pyramid.

- (a) Ställ upp ett uttryck för antalet kulor i en pyramid med n lager.
- (b) Visa med hjälp av ditt uttryck att antalet kulor i en pyramid med n lager är

$$\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}.$$

Extra (1)

Visa, t.ex. med induktion, att för alla $n = 1, 2, 3, \dots$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = \sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Egen uppgift

- (a) Visa med induktion att påståendet $P(n)$ gäller för alla naturliga tal n , där $P(n)$ är följande påstående:

$P(n)$: Om $A \subseteq \mathbb{N}$ innehåller något $k \in \mathbb{N}$ sådant att $k \leq n$, så har A ett minsta element.

- (b) Förklara varför det här visar att alla icke-tomma delmängder av $\mathbb{N}$ har ett minsta element.

Resultatet i (b) kallas ibland för *välordningsprincipen*, eller uttrycks som att *de naturliga talen är välordnade*.

SF1671, övning 14

DM 7.7

I en del sammanhang vill man verkligen använda antingen/eller, exklusivt eller (eng. exclusive or), XOR. Det betecknas ofta med $\oplus$.

- (a) Skriv ner sanningsvärdestabellen för XOR.
- (b) Uttryck XOR med hjälp av de konnektiv vi redan definierat.
- (c) Varför tror du det är och/eller som är standardtolkningen av ordet eller, och inte antingen/eller?

DM 7.17

Skriv sanningsvärdestabeller för de två möjliga tolkningarna av $p \rightarrow q \rightarrow r$ och jämför dem.

DM 5.3

Om man kastar två tärningar, beräkna chansen för att summan ska bli:

- (a) åtta
- (b) större än åtta
- (c) mindre än åtta

(Tips: Rita upp alla tänkbara utfall.)

DM 5.7

Vad är sannolikheten för att summan av två tärningar ska bli högst tre eller minst tio?

DM 5.9

Härled formeln $P(A \text{ eller } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ och } B)$ för händelser som inte är disjunkta.

DM 5.10

Vad är sannolikheten för att ett slumpvis draget spelkort ska vara klöver eller kung?

DM 5.13

Händelserna A, B, C och D är oberoende, med $P(A) = P(B) = 0,5$ och $P(C) = P(D) = 0,8$. Beräkna sannolikheten för följande händelser:

- (a) A och B .
- (b) A och C .
- (c) A, B, C och D .
- (d) A men inte D .
- (e) Varken A, B, C eller D .

DM 5.18

Bevisa att händelserna A och B är oberoende precis om $P(A \mid B) = P(A)$.

Extra (1)

Hur många positiva delare till talet 2646000 finns det?

Extra (3)

På hur många sätt kan 13 personer placeras på 13 olika stolar kring ett runt bord, utan att Lisa och Olle (som är bland de 13) sitter bredvid varandra?

Extra (4)

I en urna med svarta och vita kulor drar vi först en kula och sedan en kula till. Sannolikheten för att första kulan är svart är 0,615. Sannolikheten för att första kulan är svart och andra kulan är vit är 0,256.

- (a) Vad är sannolikheten att den andra kulan är vit betingat på att den första var svart?
- (b) Antag att sannolikheterna är avrundade till tre decimalers noggrannhet. Räkna ut hur många svarta och vita kulor det var i urnan.

SF1671, övning 15

DM 5.26

En ordning av elementen i en mängd kallas för en permutation av elementen i mängden. Som exempel kan vi skriva upp alla permutationer av elementen i mängden $\{1, 2, 3\}$:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

Det finns alltså sex stycken permutationer av en mängd med tre element. Rita upp besluts trädet som tar fram de sex permutationerna.

DM 5.30

Varför måste det finnas precis $n!$ bijektioner mellan två mängder med vardera n element? **se**

DM 5.32

I en stor ICA-butik vid sextiden står det fullt av folk i kö i fyra kassor.

- (a) Plötsligt öppnar en femte kassa. Åtta personer rusar dit. I hur många ordningar kan de hamna?
- (b) Samma situation som ovan, men två nya kassor öppnar samtidigt. Åtta personer rusar dit och fördelar sig på fyra personer i kö till varje ny kassa. På hur många sätt kan de hamna?

DM 5.39

I ett datorprogram på tusen rader ska tjugo väljas ut för kontroll.

- (a) På hur många sätt kan detta ske?
- (b) Vad är sannolikheten för att den sista raden inte blir utvald?

DM 5.51

Vi har sex signallflaggor: tre blåa, två röda och en vit, och ska hissa dem i rad till en signal. Hur många olika signaler kan vi åstadkomma? Skriv svaret med hjälp av en multinomialkoefficient.

DM 5.52

Hur många följder kan man bilda av bokstäverna i ordet "multinomialkoefficient"?

Extra (3)

- (a) Visa med ett kombinatoriskt resonemang att om $k, m, n \in \mathbb{N}$ gäller

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

Vad får man för $m = 1$, $k \geq 1$? (Då $r, s \in \mathbb{N}$ och $s > r$ låter vi $\binom{r}{s} = 0$.)

- (b) Kan du visa det med induktion över n ?

Extra (6)

På en cirkels periferi ligger n olika punkter $P_1, P_2, \dots, P_n$. Man drar alla kordorna ("diagonalerna") $P_i P_j$ mellan punkterna.

1. Hur många skärningspunkter mellan dessa finns det inne i cirkeln, om det aldrig går tre kordor genom samma punkt?
2. Hur många områden delas cirkelns inre in i av kordorna? (Talföljden börjar 1, 2, 4, 8, 16 men låt dig inte luras av det.)

SF1671, övning 16

DM 5.56

I en alla-möter-alla-turnering spelar varje deltagare en match mot varje annan deltagare. Ett sällskap på n personer spelar tennis i en sådan turnering. Ingen förlorar alla matcher den deltar i. Visa att det måste finnas två personer med samma poäng.

DM 5.57

En person har för vanan att para ihop strumpor i samband med att de plockas ur tvättmaskinen.

- (a) Om det finns 20 par strumpor i maskinen, hur många måste man i värsta fall ta upp innan man får tag i två som hör ihop?
- (b) Hur stor är sannolikheten att man verkligen måste ta upp så många (om man bara fiskar helt slumpmässigt i maskinen)?

DM 5.62

Vi har fem matematiker och 20 kakor.

- (a) På hur många sätt kan kakorna fördelas över matematikerna?
- (b) Samma som ovan, med bivillkoret att vi vet att alla åt åtminstone två kakor.
- (c) Samma som (a), men med bivillkoret att det kan inträffa att matematikerna inte orkar alla kakorna.

DM 5.75abc

Ett vanligt svenskt bilnummer består av tre bokstäver mellan A och Z, inklusive W men utan I, Q och V, följt av tre siffror.

- (a) Hur många bilnummer kan man konstruera enligt denna specifikation?
- (b) I hur många av dem är alla symboler olika?
- (c) Hur många slutar på jämn siffra?

DM 5.77

Visa likheten

$$\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2}$$

där n och k är minst 2

- (a) med hjälp av formeln för binomialtal (algebraiskt bevis).
- (b) genom att analysera vad uttrycken betyder (kombinatoriskt bevis).

DM 5.80

En binär sträng av längd n är en följd av n stycken nollor och/eller ettor.

- (a) Hur många binära strängar av längd 8 finns det?
- (b) Hur många av dessa innehåller exakt två ettor?
- (c) Hur många innehåller ett jämnt antal ettor?

Extra (1)

Hur många olika utfall är möjliga när man slår med n st likadana tärningar?

Extra (3)

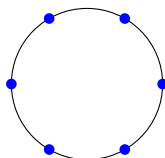
Givet 12 olika tvåsiffriga tal. Visa att minst två av dem har en skillnad som i basen 10 har formen aa .

SF1671, övning 17

DM 5.58

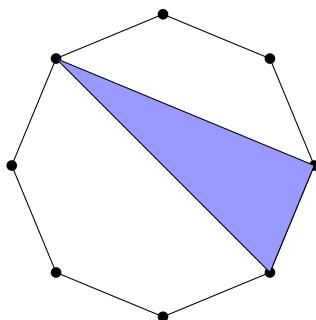
Beräkna Stirlingtalen $S(5, k)$, för $1 \leq k \leq 5$.

DM 5.65



Finns det något sätt att på en middagsbjudning placera tre par kring ett runt bord så att alla bordsgrannar är av olika kön och ingen sitter bredvid sin partner? I så fall, på hur många sätt går det?

DM 5.85



Vi har en regelbunden åttahörning.

- (a) Hur många trianglar, vars hörn också är hörn i åttahörningen, finns det? (En av dem är markerad i figuren.)
- (b) Hur många av dessa har inte en enda sida som tillhör åttahörningen?
- (c) Besvara första frågan för en regelbunden n -hörning.
- (d) Besvara andra frågan för en regelbunden n -hörning.

(Här har vi för övrigt förklaringen till att trigonometri — triangelmätning — är så användbart. Alla polygoner kan delas upp i trianglar, så kan man räkna på trianglar så kan man räkna på vilken figur som helst.)

DM 5.88

Hur många av talen mellan 1 och 100 är relativt prima till både 5, 7 och 9?

DM 8.55

Låt A och B vara ändliga mängder med $|A| = m$ och $|B| = n$.

- (a) Hur många funktioner från A till B finns det? Motivera!
- (b) Hur många injektiva funktioner från A till B finns det? Motivera!
- (c) Hur många surjektiva funktioner från A till B finns det? Motivera!
- (d) Vad krävs egentligen för att det ska kunna finnas en bijektiv funktion från A till B ? Motivera!
- (e) Hur många olika bijektiva funktioner från A till B finns det? Motivera!
- (f) Om en funktion $f : A \rightarrow B$ är surjektiv, är den då injektiv eller inte? Samma fråga för en injektiv funktion.
- (g) Om $f : A \rightarrow A$ är surjektiv, är den då injektiv? Och om den är injektiv, är den då surjektiv?
- (h) Blir det samma svar på föregående fråga om A är oändlig?

Extra (1)

Hur många omkastningar av A, B, D, G, J, U som varken innehåller DU eller JAG finns det?

Extra (4)

Visa att för Stirlingtal (av andra slaget) gäller

$$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1 \quad \text{och} \quad S(n, n-1) = \binom{n}{2}.$$

Extra (6)

En blomsteraffär vill skylta med 15 olika blomkrukor på fem hyllor i skyltfönstret. Om ingen hylla får vara tom och ingen hylla får ha fler än 4 blomkrukor, hur många olika sätt finns det att välja mellan?

Extra (8)

Tre mängder A , B och C har kardinalitet $|A| = 27$, $|B| = 24$ och $|C| = 21$. Vi vet också att

- Antalet element som tillhör exakt en av de tre mängderna är dubbelt så stort som antalet som tillhör exakt två av mängderna.
- Antalet element som tillhör exakt en av de tre mängderna är tre gånger så stort som antalet som tillhör alla tre mängderna.

Hur många element finns totalt? Med andra ord, vad är kardinaliteten hos $A \cup B \cup C$?

SF1671, övning 18

Uppgifter är inte bestämda ännu.