

SF1625, seminarium 1

Uppgift A (tentamen 2019-06-07, uppgift 4)

Vi har funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{när } x \neq 0, \\ 2 & \text{när } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Vad menas med att en funktion är kontinuerlig i en given punkt?
- (b) Visa att $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cos(1/x)) = 0$.
- (c) Existerar det en kontinuerlig funktion F definierad på hela tallinjen, som sammanfaller med f när $x \neq 0$?

Uppgift B (tentamen 2019-06-07, uppgift 7)

En funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kallas likformigt kontinuerlig om det till varje $\epsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att för alla x och y gäller att

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Visa att funktionen $f(x) = x^2$ inte är likformigt kontinuerlig.

Uppgift C (tentamen 2019-10-22, uppgift 6(a))

Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ och att $0 \leq f(0) \leq 1$ och $0 \leq f(1) \leq 1$. Visa att det finns (minst) en punkt p i intervallet $[0, 1]$ sådan att $f(p) = p$.

Uppgift D (tentamen 2020-01-07, uppgift 6(a))

Antag att funktionen $f(x)$ är definierad på hela reella linjen och att $(f(x))^2 \leq x^4 + x^6$ för alla x . Avgör om f måste vara kontinuerlig i punkten $x = 0$.

Uppgift E (tentamen 2021-01-07, uppgift 5(a))

Låt funktionen f vara definierad för alla reella tal x genom

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{om } x \neq 0, \\ 0, & \text{om } x = 0. \end{cases}$$

I vilka punkter är f kontinuerlig?

SF1625, seminarium 2

Uppgift A (tentamen 2016-10-25, uppgift 7)

- (a) Definiera vad det betyder för en funktion f att vara kontinuerlig i a .
- (b) Definiera vad det betyder för en funktion f att vara deriverbar i a .
- (c) Bestäm talen a och b så att funktionen f som ges av

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

blir både kontinuerlig och deriverbar i punkten $x = 1$.

Uppgift B (tentamen 2017-03-17, uppgift 7)

Vi betraktar funktionen f som ges av

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Visa att f är deriverbar i origo, och bestäm $f'(0)$.
- (b) Är f 's derivata kontinuerlig i origo?

Uppgift C (tentamen 2016-06-10, uppgift 6)

Betrakta kurvan som ges av ekvationen $2x^2 + 4xy + 3y^2 + 2y = 10$.

- (a) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan i punkten $(x_0, y_0) = (-1, 2)$.
- (b) Bestäm med hjälp av tangenten ett närmevärde för y -koordinaten till en punkt på kurvan vars x -koordinat är $-0,8$.
- (c) Kan det finnas mer än en punkt på kurvan som har x -koordinat $-0,8$?

Uppgift D (tentamen 2017-10-24, uppgift 2)

- (a) Ge ett exempel på en funktion definierad på ett slutet och begränsat intervall som inte antar ett största värde.
- (b) Visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-\frac{1}{2})e^x}{x-\frac{1}{2}} & \text{om } x \neq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{e} & \text{om } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

är kontinuerlig i punkten $x = \frac{1}{2}$.

- (c) Avgör om funktionen $f(x)$ antar ett största och ett minsta värde på det slutna intervallet $[0, 1]$.

Uppgift E (tentamen 2018-03-12, uppgift 4)

Visa att ekvationen $x^7 + 3x^5 - \frac{3}{2x} + 2 = 0$ har en unik lösning i det öppna intervallet $(0, 1)$.

Uppgift F (tentamen 2019-01-07, uppgift 6)

Vi har funktionen

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{när } x \neq 0, \\ 0 & \text{när } x = 0. \end{cases}$$

Visa att $F''(0)$ inte existerar.

Uppgift G (tentamen 2020-10-15, uppgift 6)

- (a) Antag att $f(0) = 0$ och att $|f(x)| > \sqrt{|x|}$ för alla $x \neq 0$. Visa att funktionen f inte kan vara deriverbar i punkten $x = 0$.
- (b) Antag att funktionen g är definierad på hela reella axeln och uppfyller följande villkor: $g'(0) = k$, $g(0) \neq 0$ och $g(x+y) = g(x)g(y)$ för alla x och y . Visa att $g(0) = 1$ och att $g'(x) = kg(x)$ för alla x .

SF1625, seminarium 3

Uppgift A (tentamen 2017-01-09, uppgift 8)

Funktionen f ges av

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{4}{5} \arctan x.$$

Bestäm det största öppna intervallet som innehåller punkten $x = 1$, där f är inverterbar.

Uppgift B (tentamen 2016-03-22, uppgift 6)

Ett föremål med massan m faller genom jordatmosfären mot jordens yta. Om vi antar att luftmotståndet är direkt proportionellt mot farten v fås enligt Newtons andra lag differentialekvationen

$$mv'(t) = -kv(t) + mg$$

där k är en positiv konstant och g tyngdaccelerationen.

- (a) Bestäm farten v vid en godtycklig tidpunkt t , om föremålet släpps från vila vid tidpunkten $t = 0$.
- (b) Visa att farten enligt modellen inte kan öka obegränsat utan kommer att närma sig ett visst värde efter lång tid. Bestäm detta värde.

Uppgift C (tentamen 2017-01-09, uppgift 4)

Positionen $y(t)$ av en viss partikel i ett kraftfält vid tiden t uppfyller differentialekvationen

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0.$$

- (a) Om man vet att $y(t) = 3e^{-3t} + 6e^{2t}$, vilka värden har då a och b ?
- (b) Lös differentialekvationen när $a = -5$ och $b = 6$ med initialvillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 4$.

Uppgift D (tentamen 2017-03-17, uppgift 4)

Newtons avsvärningslag säger att ett varmt objekt svalnar i en takt som är proportionell mot temperaturskillnaden mot omgivningen. Låt $y(t)$ vara temperaturen i ett vattenkär, vid tiden t minuter. När vattnet kokar ställs kärlet utomhus i -20° . Temperaturen $y(t)$ uppfyller differentialekvationen på formen $y'(t) = k(y(t) + 20)$. Vi vet också att temperaturen är 40° efter 10 minuter.

- (a) Lös differentialekvationen (Ledning: Substituera $u(t) = y(t) + 20$).
- (b) När är temperaturen 25° ?

Uppgift E (extra utmanande¹ uppgift om Lipschitzkontinuitet och regularitet, global entydighet och existens av lösningar till autonoma differentialekvationer)

Låt $I \subseteq \mathbb{R}$ vara² ett intervall. En funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sägs vara *glatt* om den i varje punkt kan deriveras hur många gånger som helst. Vi säger att f är *Lipschitzkontinuerlig* om det finns en konstant K sådan att $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ för alla $x, y \in I$.

- (a) Är alla glatta funktioner $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitzkontinuerliga? Är alla Lipschitzkontinuerliga funktioner $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ glatta? Blir svaren annorlunda om vi antar att I är ett slutet och begränsat intervall? Bevisa eller ge motexempel för varje påstående.
- (b) *Regularitet*: Antag att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är glatt, och antag att $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ är en funktion definierad på ett öppet intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, som uppfyller $y(x_0) = y_0$, för något $x_0 \in I$ och något $y_0 \in \mathbb{R}$, och $y'(x) = f(y(x))$ för alla $x \in I$. Visa att y är glatt.

Följande sats kan vara användbar för att lösa de återstående uppgifterna:

Sats 1. Antag att $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, och att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en Lipschitzkontinuerlig funktion. Då finns ett $\epsilon > 0$ och en funktion $y : (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller $y(x_0) = y_0$ och $y'(x) = f(y(x))$ för alla $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, och som är den unika funktionen som uppfyller dessa villkor. Med andra ord, om $\tilde{y} : (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ är en annan funktion som uppfyller $\tilde{y}(x_0) = y_0$ och $\tilde{y}'(x) = f(\tilde{y}(x))$ för alla $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, så är $y = \tilde{y}$.

Satsen är ett specialfall av *Picard–Lindelöfs sats*, och ni får använda satsen utan³ bevis.

- (c) *Global entydighet*: Antag att f och y uppfyller villkoren i deluppgift (b), men antag också att f är Lipschitzkontinuerlig. Visa att y är den *unika* funktionen på intervallet I som uppfyller dessa villkor. Med andra ord, visa att om $\tilde{y} : I \rightarrow \mathbb{R}$ är en annan funktion som uppfyller $\tilde{y}(x_0) = y_0$ och $\tilde{y}'(x) = f(\tilde{y}(x))$ för alla $x \in I$, så är $y = \tilde{y}$.
- (d) *Global existens*: Antag att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är glatt, Lipschitzkontinuerlig och begränsad, och att $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Visa att det existerar en funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definierad på hela $\mathbb{R}$, sådan att $y(x_0) = y_0$ och $y'(x) = f(y(x))$ för alla $x \in \mathbb{R}$.
- (e) Visa att resultatet från deluppgift (d) gäller även utan antagandet om att f är Lipschitzkontinuerlig.
- (f) Visa att resultatet från deluppgift (d) gäller även utan antagandet om att f är begränsad (men fortfarande med antagandet om att f är Lipschitzkontinuerlig).
- (g) Visa att resultatet från deluppgift (d) inte gäller om båda dessa antaganden tas bort. Med andra ord, ge ett exempel på en glatt funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (som enligt deluppgift (e) och (f) varken kan vara Lipschitzkontinuerlig eller begränsad), tillsammans med konstanter $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, sådana att det inte existerar någon funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller $y(x_0) = y_0$ och $y'(x) = f(y(x))$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

¹Den här uppgiften är egentligen bara avsedd för några studenter som tyckte att seminarieuppgifterna var väldigt lätta. Uppgiften är betydligt svårare än uppgifter som skulle kunna komma på tentor i alla de matematikkurser som ingår i ert program. Den går däremot att lösa med enbart teorin ni hittills har lärt er i SF1625.

²Notera att I även kan vara hela $\mathbb{R}$, eller vara obegränsat i en riktning.

³Beviset kräver verktyg ni inte kommer lära er i denna kurs, såsom teori för metriska rum, speciellt *Banachs fixpunktsats* (för bakgrund till detta, se exempelvis boken *Principles of Mathematical Analysis* av Walter Rudin, som används i kursen SF1677 *Analysens grunder*). Det kräver även viss teori om integraler, som ni inte har gått igenom i kursen ännu.

SF1625, seminarium 4

Uppgift A (tentamen 2016-03-22, uppgift 4)

Vi ska Taylorutveckla funktionen $f(x) = \ln(1+x)$.

- (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 4 kring punkten $x = 0$ till funktionen f .
- (b) Använd polynomet i uppgift (a) för att beräkna ett närmevärde till $\ln 2$.
- (c) Avgör om felet i ditt närmevärde är mindre än 0,25.

Uppgift B (tentamen 2016-06-10, uppgift 4)

Antag att funktionen f är tre gånger deriverbar på hela reella axeln. Antag vidare att $f(1) = 2$, $f'(1) = -3$ och $|f''(x)| \leq 5$ för alla x .

- (a) Bestäm ett närmevärde till $f(1,1)$ med hjälp av linjär approximation (Taylorpolynom av grad 1).
- (b) Bestäm så noggrant som möjligt en gräns för felet i ditt närmevärde.

Uppgift C (tentamen 2017-01-09, uppgift 5)

Låt $f(x) = \arctan(x^2)$.

- (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 1 till $f(x)$ omkring $x = 1$.
- (b) Visa att $|\frac{\pi}{4} + \frac{1}{10} - f(1,1)| < 1/50$.

Uppgift D (tentamen 2017-03-17, uppgift 6)

Linjär approximation av funktionen $f(x) = x^{1/3}$ omkring punkten $a = 8$ ger feltermen $E(x)$. För varje x finns ett tal $s = s(x)$ sådant att $E(x) = \frac{f''(s)}{2}(x-8)^2$, där $8 < s < x$.

- (a) Visa att $|E(x)| < \frac{1}{9,32}$ på intervallet $8 \leq x \leq 9$.
- (b) Visa att $|9^{1/3} - \frac{25}{12}| < \frac{1}{9,32}$.

Uppgift E (tentamen 2019-01-07, uppgift 5)

Avgör om $|\ln(\frac{3}{2}) - \frac{3}{8}|$ är större eller mindre än 0,05.

Uppgift F (tentamen 2020-06-03, uppgift 5)

Visa att

$$\ln \left(\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2x}} \right) > 1 \quad \text{för alla } 0 < x < 1.$$

Uppgift G (tentamen 2017-01-09, uppgift 6)

Ellipsen E med halvxarlarna $a > 0$ och $b > 0$ ges av ekvationen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Bestäm den största möjliga area en rektangel kan ha om den har sina hörn på ellipsen E , och där rektangelns sidor är parallella med halvxarlarna.

Uppgift H (tentamen 2019-01-07, uppgift 3)

Funktionen f ges av

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14.$$

För vilka reella värden y har ekvationen $f(x) = y$ precis två olika lösningar?

Uppgift I (tentamen 2021-06-11, uppgift 5)

Funktionen f är en oändligt deriverbar funktion, definierad i någon öppen omgivning I till $x = e$, och bestämd av villkoren

$$\begin{cases} e^{f(x)} - x(f(x))^2 = 0 \\ f(e) = 1 \end{cases}$$

Bestäm andra ordningens Taylorpolynom till f kring punkten $x = e$.

Uppgift J (extra utmanande uppgift om reellt analytiska funktioner, hela funktioner, och analytisk fortsättning)

En del uppgifter i denna modul går ut på att approximera en funktion $f(x)$ i närheten av en punkt a med ett Taylorpolynom, och många av dessa uppgifter kräver att felet ska vara mindre än ϵ , där $\epsilon > 0$ är ett specifikt tal, givet i uppgiften. För att lösa dessa uppgifter är en allmän metod att prova med ett Taylorpolynom av grad 1 och undersöka om felet blir mindre än ϵ . Om det inte blir det, ökar man successivt graden på Taylorpolynomet och provar igen, tills felet blir mindre än ϵ .

En intressant fråga är huruvida denna metod (i teorin) alltid fungerar, oavsett hur litet $\epsilon > 0$ är. Ett potentiellt problem är förstås om f inte kan deriveras hur många gånger som helst (och därmed inte har Taylorpolynom av godtyckligt hög grad), och därför är det rimligt att anta att f är glatt (som definierades i den förra utmanande uppgiften). Ett annat potentiellt problem är om x inte är tillräckligt nära a för att approximationen ska bli bra, och därför är det rimligt att begränsa sig till att bara betrakta punkter x inom något avstånd $R > 0$ från a . I denna uppgift kommer vi bland annat undersöka huruvida det finns några hinder utöver dessa.

Låt $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ vara en glatt funktion definierad på ett öppet intervall I . Vi säger att f är *analytisk* i a om proceduren beskriven ovan alltid fungerar, för x nära a . Mer exakt menar vi att f sägs vara analytisk i a om det finns något intervall $(a - R, a + R) \subseteq I$ (där $R > 0$) sådant att det för varje $\epsilon > 0$ finns¹ ett n sådant att

$$|f(x) - p_n(x)| < \epsilon \text{ för alla } x \in (a - R, a + R).$$

Med p_n menas här Taylorpolynomet av grad n för f kring a , det vill säga

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

(a) Visa att $f(x) = e^x$ är analytisk i 0.

(b) Visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

inte är analytisk i 0, men är analytisk i alla andra punkter.

Vi säger att f är *analytisk* (utan att specificera någon punkt) om f är analytisk i alla punkter i sin definitionsområde. Om I och J är öppna intervall som uppfyller $I \subseteq J$, och om $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ är två analytiska funktioner som uppfyller att $f(x) = g(x)$ för alla $x \in I$, sägs g vara en *analytisk fortsättning* av f .

(c) Antag att g_1 och g_2 båda är analytiska fortsättningar till f , där g_1 och g_2 är definierade på J och f är definierad på $I \subseteq J$. Visa att $g_1 = g_2$. Detta resultat beskrivs ofta som att *analytiska fortsättningar är entydiga*.

(d) Förklara varför detta ger ett alternativt bevis av att funktionen från (b) inte är analytisk i 0.

I definitionen av analyticitet nämndes att det behövde finnas något $R > 0$ sådant att resten av påståendet gäller. Det behöver inte betyda att det funkar för vilket $R > 0$ som helst. I de fallen där f är analytisk och har definitionsområde $\mathbb{R}$, och där vilket val av $R > 0$ som helst fungerar (för alla $a \in \mathbb{R}$) kallas f för en *hel* funktion. En hel funktion är alltså en funktion som kan approximeras väl med Taylorpolynom runt en viss punkt, även när man befinner sig långt från den punkten, så länge man väljer ett Taylorpolynom med tillräckligt hög grad.

(e) Visa att $f(x) = \sin x$ är hel.

(f) Visa att $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ är analytisk, men inte hel.

¹Notera att n i regel beror på ϵ , och behöver göras större om ϵ görs mindre.

SF1625, seminarium 5

Uppgift A (tentamen 2016-10-25, uppgift 8)

Låt funktionen f vara definierad genom

$$f(t) = \begin{cases} \cos^2 t, & 0 \leq t \leq 1 \\ t^2 + 1 & t > 1 \end{cases}$$

Beräkna för varje tal $x \geq 0$ integralen

$$\int_0^x f(t) dt.$$

Uppgift B (tentamen 2017-01-09, uppgift 7)

Låt f vara en funktion på ett intervall $I = [a, b]$. Antag att f är kontinuerlig, växande samt positiv på intervallet I . För varje x i I , låt $A(x)$ vara arean mellan funktionsgrafen och x -axeln till f på intervallet $[a, x]$. Visa fundamentalsatsen som säger att funktionen A är deriverbar och att $A'(x) = f(x)$.

Uppgift C (tentamen 2016-01-11, uppgift 4)

Beräkna integralen

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{2 + 8x^2} dx.$$

För full poäng krävs att integralen beräknas exakt, men delpoäng kan ges för en approximativ beräkning. Svaret ska förenklas så långt som möjligt.

Uppgift D (tentamen 2016-06-10, uppgift 5)

Beräkna integralen

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x dx$$

För full poäng krävs att integralen beräknas exakt, men delpoäng kan ges för en approximativ beräkning. Svaret ska förenklas så långt som möjligt.

Uppgift E (tentamen 2018-10-23, uppgift 6)

Antag att funktionen $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är två gånger deriverbar och att $\phi''(x)$ är kontinuerligt överallt. Visa att om $\phi''(x) > x^2$ för alla x , och om $\phi(0) = -1$, så finns ett tal $c > 0$ sådant att $\phi(c) = 0$.

Uppgift F (tentamen 2019-06-07, uppgift 5)

Vi har funktionen

$$g(x) = \int_0^x \frac{1-t}{1+t^{7/2}} dt,$$

definierad för alla $x \geq 0$.

- (a) Bestäm talet x där funktionen g uppnår sitt största värde.
- (b) Avgör om gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ existerar.

Uppgift G (tentamen 2020-03-09, uppgift 5)

Låt $n \geq 1$ vara ett heltal, och låt P_n vara partitionen av intervallet $[2, 3]$ i n stycken delintervall, alla av längd $1/n$. Låt $L(P_n)$ vara Riemann-undersumman (lower sum) av funktionen $f(x) = 3x$ på intervallet $[2, 3]$ med avseende på den givna partitionen P_n .

- (a) Bestäm en formel, bara beroende på talet n , för $L(P_n)$.
- (b) Bestäm gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n)$.

Uppgift H (extra utmanande uppgift om kompakt stöd, mollifikatorer och svagt harmoniska funktioner)

En funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sägs ha *kompakt stöd* om det finns något intervall $[a, b]$ sådant att $f(x) = 0$ för alla x utanför intervallet (detta kallas också för att f är en *kompakt stödd funktion*). Om f är en kontinuerlig funktion med kompakt stöd är det meningsfullt att prata om integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad (1)$$

genom att definiera den som integralen av f över något sådant intervall¹ $[a, b]$. Alternativt kan man tolka integralen i (1) som en generaliserad integral, vilket ger samma resultat.

- (a) Visa att det existerar en glatt och kompakt stödd funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att $\phi(x) \geq 0$ för alla x , som också uppfyller

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1.$$

En sådan funktion kallas för en *mollifikator*.

- (b) Antag att ϕ är en mollifikator och att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Visa att det för alla $a \in \mathbb{R}$ gäller

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(t(x-a)) dx \right) = f(a).$$

- (c) Antag att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är glatt, och att det för alla glatta, kompakt stödda funktioner g gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g''(x) dx = 0.$$

Visa att f är ett förstgradspolynom.

- (d) Visa att resultatet från deluppgift (c) gäller även om antagandet att f är glatt tas bort, och man istället bara² antar att f är kontinuerlig.

¹Denna integrals värde är oberoende av vilket sådant intervall man väljer.

²Inom den högre matematiken uttrycks dessa antaganden ofta som att f är *svagt harmonisk*, eller att f är en *svag lösning på Laplaces ekvation*. Det resultat som ska visas i uppgiften är ett specialfall av vad som brukar kallas för *elliptisk regularitet*.

SF1625, seminarium 6

Uppgift A (tentamen 2017-03-17, uppgift 8)

Resonemanget: ”Då $-1/x$ är en primitiv funktion till $1/x^2$ har vi att $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -2$ ” är gale. Förklara vad som är fel i resonemanget, och bestäm sedan korrekt värdet av integralen ovan.

Uppgift B (tentamen 2018-01-08, uppgift 5)

Avgör om integralen

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} dx$$

är konvergent eller divergent.

Uppgift C (tentamen 2016-06-10, uppgift 9)

Kurvorna $y = x^{2/3}$ och $y = x^{3/2}$ begränsar ett område i första kvadranten. Beräkna längden av områdets begränsningskurva.

Uppgift D (tentamen 2016-10-25, uppgift 6)

Vi betraktar funktionen

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

definerad på intervallet $-1 \leq x \leq 1$.

- (a) Skriv upp integralen som ger längden av funktionsgrafen $y = f(x)$.
- (b) Beräkna längden av denna kurva.

Uppgift E (tentamen 2017-03-17, uppgift 9)

Kardioidkurvan parametreras genom

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y(t) &= \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

- (a) Bestäm längden av kurvan.
- (b) Bestäm minsta avståndet från kurvan till origo.

Uppgift F (tentamen 2019-01-07, uppgift 7)

Kurvan C parametreras av

$$r(t) = \left(\frac{\cos t}{t^2}, \frac{\sin t}{t^2} \right)$$

där

$$\frac{\pi}{2} \leq t < \infty.$$

Visa att kurvan C har ändlig längd.

Uppgift G (extra utmanande uppgift om omloppstal och gånghomotopi)

Antag att vi har en kurva C som beskrivs av två glatta funktioner $x, y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, där kurvans punkter beskrivs av $(x(t), y(t))$, för $0 \leq t \leq 1$. Antag vidare att kurvan C inte passerar genom origo (det vill säga att $x(t) = y(t) = 0$ inte gäller för något t). Vi definierar *omloppstalet* för C enligt

$$\text{omlopp}(C) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} dt.$$

- (a) Visa att det finns en glatt funktion $r : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ och en glatt funktion $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sådana att $x(t) = r(t) \cos(\theta(t))$ och $y(t) = r(t) \sin(\theta(t))$ för alla $t \in [0, 1]$.
- (b) Under antagandet att kurvan C är sluten, det vill säga att $x(0) = x(1)$ och $y(0) = y(1)$, visa att $\text{omlopp}(C)$ alltid är ett heltal.

Antag att det för varje $t \in [0, 1]$ existerar en kurva C_t som inte passerar genom origo, beskriven av två glatta funktioner $x_t, y_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, och antag att det för varje $t \in [0, 1]$ gäller att $x_0(0) = x_t(0) = x_t(1)$ och $y_0(0) = y_t(0) = y_t(1)$. Antag vidare att det för **alla** val av glatta funktioner $u, v : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gäller att funktionerna $f(t) = x_{u(t)}(v(t))$ och $g(t) = y_{u(t)}(v(t))$ är glatta. I detta fall sägs C_0 vara *gånghomotop* till C_1 och vice versa; C_0 och C_1 sägs vara *gånghomotopa* (till varandra).

- (c) Visa att om två glatta slutna kurvor som har samma start-/slutpunkt som varandra har samma omloppstal, så är de två kurvorna gånghomotopa.
- (d) Visa att om två sådana kurvor har olika omloppstal, så kan de inte vara gånghomotopa.