



Institutionen för Matematik

SF1625

Envariabelanalys

Läsåret 2025-2026

Albin Eriksson Östman

Repetition

LÄSANVISNINGAR

Nedan följer kortfattade läsanvisningar för repetition. Kursboken är *Calculus* av Robert A. Adams och Christopher Essex, 9th eller 10th ed.

Hänvisningarna nedan är samma för bägge upplagorna.

Kapitel P1 - P7 innehåller NÖDVÄNDIGA FÖRKUNSKAPER för resten av kursen.

Kapitel P1. Allt är mycket viktigt. Observera särskilt hur man löser olikheter med faktorisering och teckenstudie.

Kapitel P2. Allt är mycket viktigt. Man måste kunna linjens ekvation på enpunktsform "point-slope equation". Observera att riktningskoefficienten för en linje betecknas m i boken.

Kapitel P3. Allt är viktigt. Observera särskilt avsnittet "Shifting a Graph" och Exempel 11. (Kvadratkomplettering ska man kunna sedan tidigare. Kommer man inte ihåg så måste man repetera.) Brännpunkt och styrlinje för parabler är mindre viktigt.

Kapitel P4. Allt utom avsnittet "Defining and graphing functions with Maple" är mycket viktigt. Man ska förstå funktionsgraferna på s. 27.

Kapitel P5. Allt är mycket viktigt.

Kapitel P6. Allt är mycket viktigt. Algoritmen för polynomdivision skrivs annorlunda i boken än i svenskt gymnasium (liggande stolen). Båda sätt att skriva är ok. I boken används en mer generell lösningsformel för andragradsekvationer än pq -formeln.

Kapitel P7. Hela avsnittet mycket viktigt, förutom cotangent, secant och cosecant. Man måste kunna formler för $\sin(s+t)$ och $\cos(s+t)$. Man måste kunna använda enhetscirkeln, kunna sinus och cosinus av standardvinklar, samt kunna lösa trigonometriska ekvationer.



Modul 1: Gränsvärde och kontinuitet

De tre huvudbegreppen i denna modul är **funktion**, **gränsvärde** och **kontinuitet**. Lägg noga märke till vad de betyder, dvs hur de definieras. Till funktionsbegreppet finns en rad andra termer och begrepp som man måste behärska. De viktigaste är *definitions mängd*, *värde mängd*, *funktions graf*, *tangent och normal till funktions graf*, *begränsad funktion*, *udda respektive jämn funktion*, *styckvis definierad funktion*, *sammansättning av funktioner*, *absolutbeloppsfunktionen*. Dessa begrepp ska man både kunna definiera matematiskt och använda i problemlösning.

När det gäller **gränsvärde** så är det viktigt att förstå att gränsvärdesdefinitionen är till för att på ett precist sätt formulera begreppet gränsvärde. Man använder sällan själva definitionen för att beräkna gränsvärden – till detta har man andra metoder.

När det gäller **kontinuitet** så är det viktigt att komma fram till insikten att det finns en stor klass av funktioner, kallade **elementära funktioner**, som är kontinuerliga i alla punkter i sina definitions mängder. Det betyder att för dessa funktioner får man gränsvärdet i en punkt genom att räkna ut funktionsvärdet i punkten. Det är bara i punkter där dessa funktioner inte är definierade som gränsvärdet är ett problem som måste undersökas. De elementära funktionerna är *polynom*, *rationella funktioner*, *potensfunktioner*, *exponentialfunktioner*, *logaritmfunktioner*, *trigonometriska funktioner*, *inversa trigonometriska funktioner* – och alla kombinationer av dessa med hjälp av de fyra räknesätten och sammansättning.

För **kontinuerliga funktioner** definierade på **slutna och begränsade intervall** finns ett par viktiga satser. Dessa satser säger att sådana funktioner alltid antar ett största och ett minsta värde, och att om de antar två värden så tar de också alla värden däremellan.

LÄSANVISNINGAR

Kapitel 1.1 är en introduktion till gränsvärdesbegreppet - läs detta översiktligt. Exemplet "Area of a Circle" kräver lite mer eftertanke - återvänd till det när du har tid.

Kapitel 1.2. Sidorna 64 - 65 är motiverande inledande exempel. Resten av kapitlet, sid 66 - 71, behöver du läsa och lära dig.

Kapitel 1.3. Läs och lär sidorna 73 - 77 (fram till "Using Maple ..."). Avsnittet om Maple-kommandon ingår inte i kursen, läs om du är intresserad.

Kapitel 1.4. Läs noga i sin helhet. Observera hur intervallhalvering kan användas för att hitta approximativa lösningar till ekvationer med godtycklig noggrannhet.

Kapitel 1.5. I detta kapitel ges de formella definitionerna av gränsvärdesbegreppet. Läs som en orientering till att börja med, fördjupa dig i detta först när du är klar med resten av modulen.

UPPGIFTER TILL WORKSHOP 1

Under workshopen arbetar du med uppgifterna nedan, antingen själv eller i grupp. Om du inte kan lösa en uppgift, fundera på precis vad det är du inte förstår. Är det ett begrepp som är oklart? Är det en metod som du inte kan använda? Gå tillbaka till boken eller anteckningarna och se om du kan hitta svaret där. Om inte, fråga en kamrat eller läraren. Be bara om hjälp med precis det du inte förstår, inte om hela lösningen på uppgiften. Det är du som ska arbeta på workshopen!

Uppgift 1. Denna uppgift handlar om linjer.

- (a) Ange en ekvation för linjen genom $(5, -1)$ som har riktningskoefficient -2 .
- (b) Ange en ekvation för linjen som går genom punkterna $(1, -3)$ och $(-2, 5)$.
- (c) Avgör om linjerna definierade av ekvationerna $8x + 16y + 5 = 0$ och $x = -2y + 33$ är parallella.
- (d) Avgör om linjerna definierade av ekvationerna $8x + 9y + 5 = 0$ och $9x - 8y + 15 = 0$ är vinkelräta.
- (e) Vad säger enpunktsformeln (point-slope equation) för linjens ekvation?

Uppgift 2. Lös nedanstående ekvationer.

- (a) $\sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- (b) $|2x + 1| = 2$.

Uppgift 3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Uppgift 4. Beräkna nedanstående gränsvärden.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

Uppgift 5. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^3 + x^2 - 6x}$.

Uppgift 6. Beräkna nedanstående gränsvärden.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x}$

Uppgift 7. Bestäm definitionsmängden till nedanstående funktioner. Är de kontinuerliga? Är de udda eller jämna? Är de begränsade?

(a) $f(x) = \sqrt{7 - x^2}$

(b) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = \tan x, \quad 0 \leq x < \pi/2$

(d) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 11x + 30}$

Uppgift 8. Låt $f(x) = \frac{5x - 1}{\cos 2x}$.

(a) Bestäm definitionsmängden till f .

- (b) I vilka punkter är f kontinuerlig?
- (c) Avgör om f är udda eller jämn.
- (d) Är f begränsad?

Uppgift 9. Låt $g(t) = \sqrt{1 - \frac{1}{t+1}}$.

- (a) Bestäm definitionsmängden till g .
- (b) I vilka punkter är g kontinuerlig?
- (c) Avgör om g är udda eller jämn.
- (d) Är g begränsad?

Uppgift 10. Låt $h(x) = |x| - |x+1|$.

- (a) Bestäm definitionsmängden till h . I vilka punkter är h kontinuerlig?
- (b) Skriv h som en styckvis definierad funktion, utan absolutbelopps-tecken.
- (c) Skissa grafen $y = h(x)$ och ange värdemängden till h .
- (d) Är h begränsad?

Uppgift 11. Betrakta funktionen s given av

$$s(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ x + 2, & 0 \leq x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

- (a) Vad är definitionsmängden till funktionen s ?
- (b) I vilka punkter är s kontinuerlig?
- (c) Gör en skiss av funktionskurvan $y = s(x)$.

Uppgift 12. Enhetscirkeln består av alla punkter (x, y) i planet sådana att $x^2 + y^2 = 1$.

- (a) Är enhetscirkeln funktionsgrafen $y = f(x)$ till någon funktion f ? Om ja, vilken? Om nej, varför inte?
- (b) Är övre halvan av enhetscirkeln (dvs den del där $y \geq 0$) funktionsgrafen $y = f(x)$ till någon funktion f ? Om ja, vilken? Om nej, varför inte?

UPPGIFTER TILL WORKSHOP 2

Under workshopen arbetar du med uppgifterna nedan, antingen själv eller i grupp. Om du inte kan lösa en uppgift, fundera på precis vad det är du inte förstår. Är det ett begrepp som är oklart? Är det en metod som du inte kan använda? Gå tillbaka till boken eller anteckningarna och se om du kan hitta svaret där. Om inte, fråga en kamrat eller läraren. Be bara om hjälp med precis det du inte förstår, inte om hela lösningen på uppgiften. Det är du som ska arbeta på workshopen!

Uppgift 13. Låt $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{|x|}$.

- (a) Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ och $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$
- (b) Är f kontinuerlig, diskontinuerlig, eller varken eller, i punkten $x = 0$?

Uppgift 14. Finns det något värde på konstanten a så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-2}, & \text{om } x < 3 \\ a, & \text{om } x = 3 \\ \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}, & \text{om } x > 3 \end{cases}$$

är kontinuerlig i alla punkter?

Uppgift 15. Beräkna följande gränsvärden.

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 \sin x}{1 + 3x^3}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x} + 1}{x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1})$.

Uppgift 16. Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värden att ekvationen

$$x^4 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

har minst två olika lösningar i intervallet $-1 < x < 2$.

Uppgift 17. Avgör i vilka punkter funktionen f som ges av

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin 2t}{t}, & t \neq 0 \\ 2, & t = 0 \end{cases}$$

är kontinuerlig.

Uppgift 18. Förklara hur du kan veta att

$$f(x) = \frac{\sin 47x - \cos^3 x}{x^{23} + 2x + 1}$$

måste anta ett största och ett minsta värde i intervallet $0 \leq x \leq 3$.

Uppgift 19. I denna uppgift ska man ge exempel:

- (a) Ge exempel på en kontinuerlig funktion som saknar största värde på intervallet $0 \leq x < 1$.
- (b) Ge exempel på en funktion som är kontinuerlig på intervallet $0 < x \leq 1$ och som inte är begränsad.

HEMUPPGIFTER

Uppgift 20. För vilka x gäller olikheten $|x - 2| \leq 3$?

Uppgift 21. Lös nedanstående ekvationer.

(a) $|2x - 3| = 5$

(b) $|2x + 1| = |x|$

Uppgift 22. Lös nedanstående ekvationer.

(a) $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

(b) $\tan 3x = 1$.

Uppgift 23. Ange alla nollställen till

(a) $\sin x$

(b) $\tan x$

(c) $\cos x$.

Uppgift 24. Skriv med hjälp av enpunktsformeln upp en ekvation för linjen genom punkten $(7, -1)$ med riktningskoefficient -5 .

Uppgift 25. Ange en ekvation för den räta linje genom punkten $(1, 2)$ som är normal (vinkelrät) mot linjen i föregående uppgift.

Uppgift 26. Beräkna nedanstående gränsvärden.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin^2(x-2)}{x-2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{(x+2)^2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

Uppgift 27. Avgör i vilka punkter funktionen f är kontinuerlig. Är f en kontinuerlig funktion? Svara på dessa frågor för nedanstående funktioner f .

(a) $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

(b) $f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{om } t \neq 0 \\ 1, & \text{om } t = 0 \end{cases}$

$$(c) f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{om } t \neq 0 \\ 2, & \text{om } t = 0 \end{cases}$$

$$(d) f(t) = \frac{t+1}{t^2-5t+6}$$

Uppgift 28. Visa att $x^5 + 2x^4 - x = 1$ har minst en lösning i intervallet $-1 \leq x \leq 0$.

Uppgift 29. Förklara hur du kan veta att

$$f(x) = \frac{\sin^3 x - \tan x}{x^2 + \sqrt{x} + 1}$$

måste anta ett största och ett minsta värde när x varierar i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Blir det likadant på intervallet $0 < x < 1$? Eller på intervallet $0 \leq x \leq 2$?

Uppgift 30. Ge exempel på en funktion med definitionsmängd $[1, 2]$ som inte är kontinuerlig.

Uppgift 31. Ge exempel på en kontinuerlig funktion med definitionsmängd $(1, 2)$ som inte har något största värde.

Uppgift 32. Ge exempel på en kontinuerlig funktion med definitionsmängd $(1, 2)$ som har ett största värde.

Uppgift 33. Ge exempel på en funktion som inte är kontinuerlig men som ändå antar ett största och ett minsta värde.

Uppgift 34. I vilka punkter är funktionen f kontinuerlig?

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{om } x < 3 \\ x + 4, & \text{om } x \geq 3 \end{cases}$$

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Om uppgifterna ovan är för svåra kan det vara lämpligt att först lösa några av de enklare

uppgifterna från kursboken. Men man behöver nog inte lösa alla de rekommenderade uppgifterna ur boken.

Kapitel P1: 7, 11, 19, 29, 39. Kapitel P2: 13, 15, 17, 23. Kapitel P3: 3, 7, 43, 49. Kapitel P4: 1, 3, 7, 11, 31, 33, 53. Kapitel P5: 9, 25. Kapitel P6: 1, 7, 17. Kapitel P7: 1, 3, 7, 19, 25, 26, 51. Kapitel 1.2: uppg 9, 13, 21, 25, 30, 49, 50, 78, 79. Kapitel 1.3: uppg 3, 6, 11, 13, 53. Kapitel 1.4: uppg 7, 8, 12, 15, 17, 20, 21, 29. Kapitel 1.5: uppg 13, 29.

SVÅRARE UPPGIFTER

Uppgift 35. Antag att $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$. Gäller det att $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(L)$ för alla funktioner f , eller bara för vissa? Förklara varför eller ge motexempel.

Uppgift 36. Visa att kurvorna $y = x^3 - x^2 + 2x + 3$ och $y = x^4 + x^3 - 2x + 4$ skär varandra i minst en punkt.

Uppgift 37. Antag att $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ och $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Visa att $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LM$ med hjälp av definitionen av gränsvärde.

TENTAMENSPROBLEM

Tentamensproblemen är av varierande svårighetsgrad. Generellt betyder högre nummer på uppgiften svårare problem. De är avsedda att ge en uppfattning om vilken typ av uppgifter som kan förekomma på tentamen. Du hittar tidigare tentamen och lösningar till dem på Canvas.

2019-06-07: 4, 7

2019-10-22: 6(a)

2020-01-07: 6(a)

2021-01-07: 5(a)

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. (a) $y + 1 = -2(x - 5)$. Kan också skrivas $y = -2x + 9$.
- (b) $y = -\frac{8}{3}x - \frac{1}{3}$.
- (c) Ja (ty de har samma riktningskoefficient).
- (d) Ja (ty $k_2 = -1/k_1$, där k_1 och k_2 är riktningskoefficienterna).
- (e) Läs i boken eller i er gymnasiebok.
2. (a) $x = -\pi/8 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal, eller $x = 5\pi/8 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.
- (b) Lösningarna är $x = 1/2$ och $x = -3/2$.
3. Funktionen kan skrivas som $f(x) = (x - 2)^2 + 1$. Grafen är alltså lika dan som $y = x^2$, men flyttad två steg åt höger och en steg uppåt.
4. (a) $1/3$
- (b) $1/4$
- (c) Gränsvärde saknas (det är INTE ∞).
- (d) 0
5. $1/10$
6. (a) 0
- (b) 1
7. (a) $D_f = [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$. f är kontinuerlig, jämn, begränsad.
- (b) Definitionsmängden är alla $x \neq 0$. f är kontinuerlig, udda, begränsad.
- (c) Definitionsmängden är $[0, \pi/2)$. f är kontinuerlig, inte begränsad, varken udda eller jämn.
- (d) Definitionsmängden är alla x utom 5 och 6. f är kontinuerlig, inte begränsad, varken udda eller jämn.
8. (a) Alla $x \neq \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$, n godtyckligt heltal. Tips: problemet är när nämnaren är noll.
- (b) Alla $x \neq \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$, n godtyckligt heltal.
- (c) Funktionen f är varken udda eller jämn. Tips: undersök t.ex. $f(\pi/4)$ och $f(-\pi/4)$.
- (d) Nej.

9. (a) Alla tal som är större än eller lika med 0 och alla tal mindre än -1 . Tips: undvik negativt under rottecknet och undvik division med noll.
- (b) Samma svar som i (a).
- (c) Varken udda eller jämn.
- (d) Nej.
10. (a) Definitionsmängden är alla reella tal x . Funktionen är kontinuerlig överallt.
- (b) För $x \geq 0$ är $h(x) = -1$. För x mellan -1 och 0 är $h(x) = -2x - 1$. För $x \leq -1$ är $h(x) = 1$.
- (c) Det är lätt att rita grafen med hjälp av informationen i (b). Värdeområdet består av alla tal y sådana att $-1 \leq y \leq 1$.
- (d) Ja, $|h(x)| \leq 1$ för alla x .
11. (a) Alla x .
- (b) $x \neq 0$.
- (c) Se sidorna 36 och 37 i boken för exempel på denna typ av funktion.
12. (a) Nej.
- (b) Ja, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
13. (a) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty$ och $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \infty$
- (b) Varken eller, f är inte definierad i punkten $x = 0$.
14. Nej
15. (a) $1/3$
- (b) $\sqrt{2}$
- (c) $1/2$ Tips: Förläng med konjugatet, dvs multiplicera med $\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}$
16. Funktionen $f(x) = x^4 - x^2 - 2x - 1$ är kontinuerlig överallt och $f(-1) = 1$, $f(0) = -1$, $f(2) = 7$, så det följer av satsen om mellanliggande värden att funktionen har ett nollställe mellan -1 och 0 och ytterligare ett mellan 0 och 2 .
17. Funktionen är kontinuerlig i alla punkter på reella axeln.
18. Funktionen är kontinuerlig i varje punkt av det slutna och begränsade intervallet $[0, 3]$. Det följer att största och minsta värde finns, enligt the max-min theorem (sid 83).
19. (a) Funktionen $f(x) = x$ är ett exempel på en sådan funktion.

- (b) Funktionen $f(x) = 1/x$ är ett exempel på en sådan funktion.
20. $-1 \leq x \leq 5$ (obs att olikheten i uppgiften kan utläsas: avståndet från x till 2 ska vara högst 3)
21. (a) Lösningarna är $x = -1$ och $x = 4$ (dela upp i två fall: för $x \geq 3/2$ (men bara då) blir ekvationen ekvivalent med att $2x - 3 = 5$ och för $x < 3/2$ (men bara då) blir ekvationen ekvivalent med att $-(2x - 3) = 5$).
- (b) Lösningarna är $x = -1$ och $x = -1/3$ (se ledningen ovan, dela in i tre fall: $x \geq 0$ respektive $-1/2 \leq x < 0$ respektive $x < -1/2$)
22. (a) $x = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi$, n godt heltal
- (b) $x = \frac{\pi}{12} + n\pi/3$, n godt heltal
23. (a) $\sin x = 0 \iff x = n\pi$, n godt heltal
- (b) $\tan x = 0 \iff x = n\pi$, n godt heltal
- (c) $\cos x = 0 \iff x = \pi/2 + n\pi$, n godt heltal
24. $y = -1 - 5(x - 7)$
25. $y = 2 + (1/5)(x - 1)$
26. (a) 0
- (b) 0
- (c) 1
- (d) $1/3$
27. (a) Alla $t \neq 0$. Ja.
- (b) Alla t . Ja.
- (c) Alla $t \neq 0$. Nej.
- (d) Alla t utom $t = 3$ och $t = 2$. Ja.
28. Sätt $f(x) = x^5 + 2x^4 - x - 1$. Ekvationen i uppgiften är ekvivalent med att $f(x) = 0$. Nu är $f(-1) = 1$ och $f(0) = -1$ och eftersom 0 är ett tal mellan -1 och 1 och funktionen är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[-1, 0]$ så följer av satsen om mellanliggande värden att funktionen antar värdet noll i någon punkt i intervallet. (OBS att din lösning måste innehålla dessa ord: kontinuerlig, slutet, begränsat, satsen om mellanliggande värden)
29. f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[0, 1]$, så f måste anta ett största och ett minsta värde. På intervallen $(0, 1)$ och $[0, 2]$ gäller inte detta och vi kan inte säga

något utan att tänka efter. Problemet med $(0, 1)$ är att det inte är slutet. Problemet med $[0, 2]$ är att funktionen inte är kontinuerlig på hela intervallet – vi får division med noll i punkten $\pi/2$ som ju tillhör intervallet $[0, 2]$ (men inte $[0, 1]$).

30. T.ex. (det finns många!) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{om } 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{om } x = 2 \end{cases}$

31. T.ex. (det finns många!) $f(x) = x, 1 < x < 2$.

32. T.ex. (det finns många!) $f(x) = -|x - \frac{3}{2}|, 1 < x < 2$.

33. T.ex. (det finns många!) heavisidefunktionen (den som är 0 för negativa x och 1 för icke-negativa x).

34. Funktionen är kontinuerlig för alla x . (För $x > 3$ är den kontinuerlig automatiskt för den ges av ett elementärt uttryck där. För $x < 3$ på samma sätt. För $x = 3$ måste man använda definitionen av kontinuitet och visa att gränsvärdet av $f(x)$ när x närmar sig 3 är lika med funktionsvärdet i punkten 3.

35. Sambandet gäller då f är kontinuerlig i punkten L , men inte annars. Motexempel: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{om } x \neq 0 \\ 1, & \text{om } x = 0 \end{cases}, g(x) = x, a = 0$.

36. Tips: funktionen $f(x) = x^4 + x^3 - 2x + 4 - (x^3 - x^2 + 2x + 3) = x^4 + x^2 - 4x + 1$ är kontinuerlig.

37. -



Modul 2: Derivata

Huvudbegreppet i denna modul är **derivata**. Begreppets betydelse slås fast i en precis definition, men oftast är det inte definitionen man använder för att räkna ut derivator. I stället använder man de **deriveringsregler** som man härleder med hjälp av definitionen: produktregeln, kvotregeln och kedjeregeln.

Med hjälp av att kunna några grundläggande funktioners derivator och att behärska deriveringsreglerna, så kan man sedan derivera väldigt många funktioner. Det är viktigt att man blir riktigt bra på att derivera, så man måste **träna mycket** på detta! I denna modul börjar vi med denna träning, men den fortsätter i kommande moduler också.

Det är viktigt också att man förstår tolkningen av derivata som ett mått på funktionens förändringstakt i en punkt och att man kan använda detta för att approximera funktionen i närliggande punkter. Det senare kallas **linjär approximation** och är mycket användbart.

Man bör dock observera att inte alla funktioner är deriverbara och att derivatans definition faktiskt ger ett villkor som avgör om funktionen är deriverbar eller inte. Det finns kontinuerliga funktioner som inte är deriverbara. Se till att du kan ge exempel på sådana. En viktig sats säger att en funktion som är deriverbar i en punkt automatiskt är kontinuerlig i punkten.

LÄSANVISNINGAR

Kapitel 2.1 är en introduktion till derivatabegreppet, en repetition från gymnasiets matematikkurser.

Kapitel 2.2 - 2.5 startar med derivatans definition och från denna härleds sedan ett antal deriveringsregler och formler. Du måste kunna:

- derivatans definition; även höger- respektive vänsterderivata;
- kunna använda definitionen för att beräkna derivator samt härleda deriveringsregler och formler;
- använda deriveringsregler och formler vid beräkning och problemlösning.

Observera att en del av formlerna i boken bara är specialfall av mer generella formler; de rosa rutorna på sidan 119 och 120 innehåller specialfall av kedjeregeln, de säger inget nytt.

Läs avsnittet “Differentials” (sid 106) som en orientering. Vänta med att fördjupa dig i avsnittet “Derivatives Have the Intermediate-Value Property” (sid 107) tills du är färdig med resten av modulen. Avsnittet “Finding Derivatives with Maple” (sid 119) kan du hoppa över om du inte är intresserad av lära dig hantera mjukvaran Maple. Funktionerna secant (sec) och cosecant (csc) behöver du inte bry dig om.

Kapitel 2.6, du ska kunna beteckningarna för högre ordningens derivator och genomföra beräkningar av högre ordningens derivator.

Kapitel 2.7 presenterar tre tillämpningar av derivatan som du ska kunna:

- (i) linjär approximation (Approximating Small Changes)
- (ii) Derivatan som momentan förändringstakt (instantaneous rate of change)
- (iii) förändringskänslighet (sensitivity to change)

Kapitel 2.8. Du ska kunna formulera och använda satserna (var noga med förutsättningarna!). Observera den logiska strukturen: Bevisat av det centrala resultatet Medelvärdessatsen (Theorem 11) genomförs med hjälp av Rolles sats (Theorem 15), som i sin tur bygger på bl a Theorem 14. Satserna Theorem 12 och 13 är i sin tur konsekvenser av Medelvärdessatsen. Observera att omvändningen till Theorem 13 redan har visats tidigare oberoende av Medelvärdessatsen. Var slutligen noga med att du förstår Generaliserade Medelvärdessatsen (Theorem 16) och observera att poängen är att man får ”samma c ” både i f' och g' i högerledet, vilket är mer än vad en direkt tillämpning av Medelvärdessatsen skulle ge. **Obs:** Exempel 4 på s. 141 är inte fullständigt. Ändpunkterna -2 och 2 ska vara med i intervallen eftersom en kontinuerlig funktion är strängt växande (resp. avtagande) på ett slutet intervall om derivatan är positiv (resp. negativ) på det öppna intervallet mellan ändpunkterna.

Kapitel 2.9. Du ska kunna genomföra beräkningar av derivator för implicit definierade funktioner på det som görs i detta kapitel. Observera också härledningen av $d/dx(x^r)$ för rationella exponenter r med hjälp av implicit derivering (sid 149). Avsnittet om Maple-beräkningar ingår inte i kursen.

UPPGIFTER TILL WORKSHOP 3

Under workshopen arbetar du med uppgifterna nedan, antingen själv eller i grupp. Om du inte kan lösa en uppgift, fundera på precis vad det är du inte förstår. Är det ett begrepp som är oklart? Är det en metod som du inte kan använda? Gå tillbaka till boken eller anteckningarna och se om du kan hitta svaret där. Om inte, fråga en kamrat eller läraren. Be bara om hjälp

med precis det du inte förstår, inte om hela lösningen på uppgiften. Det är du som ska arbeta på workshopen!

Uppgift 1. Låt $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

- (a) Bestäm definitionsmängden till f .
- (b) I vilka punkter är f kontinuerlig?
- (c) Bestäm $f'(x)$.
- (d) I vilka punkter är f deriverbar?

Uppgift 2. Låt $g(x) = x \cos^2 x$.

- (a) Bestäm definitionsmängden till g .
- (b) I vilka punkter är g kontinuerlig?
- (c) Bestäm $g'(x)$.
- (d) I vilka punkter är g deriverbar?

Uppgift 3. Låt $h(t) = |1 + t| + (1 + 3t^2)^{19}$.

- (a) Bestäm definitionsmängden till h .
- (b) I vilka punkter är h kontinuerlig?
- (c) Bestäm $h'(t)$.
- (d) I vilka punkter är h deriverbar?

Uppgift 4. Derivera nedanstående uttryck med avseende på x och ange i vilka punkter derivatan existerar.

- (a) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$
- (b) $\frac{ax + b}{cx + d}$, där a, b, c, d är konstanter.
- (c) $\sqrt{1 - x}$

(d) $\sqrt{1+x^2}$

(e) $|\sin x|$

(f) $\cos(\sin(x^2))$

Uppgift 5. Låt $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$. Bestäm högerderivata och vänsterderivata till f i punkten $x = 1$. Är f deriverbar i punkten $x = 1$?

Uppgift 6. Låt $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \leq 1 \\ 4x, & x > 1 \end{cases}$. Bestäm högerderivata och vänsterderivata till f i punkten $x = 1$. Är f deriverbar i punkten $x = 1$?

Uppgift 7. Bestäm ekvationer för tangentlinjen och normallinjen i punkten $(2, 3)$ till kurvan $y = x^3 - x - 3$.

Uppgift 8. Bestäm en ekvation för tangentlinjen i punkten $(4, 2)$ till kurvan $y = \sqrt{x}$. Kan du med hjälp av tangenten hitta ett närmevärde till $\sqrt{4.2}$?

Uppgift 9. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $y = \tan x$ i den punkt på kurvan som har x -koordinat $-\pi/6$.

UPPGIFTER TILL WORKSHOP 4

Under workshopen arbetar du med uppgifterna nedan, antingen själv eller i grupp. Om du inte kan lösa en uppgift, fundera på precis vad det är du inte förstår. Är det ett begrepp som är oklart? Är det en metod som du inte kan använda? Gå tillbaka till boken eller anteckningarna och se om du kan hitta svaret där. Om inte, fråga en kamrat eller läraren. Be bara om hjälp med precis det du inte förstår, inte om hela lösningen på uppgiften. Det är du som ska arbeta på workshopen!

Uppgift 10. Om funktionen f är deriverbar överallt och om $f'(0) = 0$, kan f vara strängt växande på hela reella axeln?

Uppgift 11. På vilka intervall är funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ strängt växande? Strängt avtagande?

Uppgift 12. Vad säger medelvärdessatsen konkret för funktionen $f(x) = x^3 - 3x + 1$ på intervallet $[0, 2]$? I detta fall kan vi räkna ut ett c så att satsen gäller. Gör det!

Uppgift 13. På vilka intervall är funktionen $f(x) = x - \tan x$ strängt växande? Strängt avtagande?

Uppgift 14. Betrakta funktionen s given av

$$s(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ x + 2, & 0 \leq x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$$

- (a) I vilka punkter är funktionen deriverbar?
- (b) Beräkna om möjligt $s'(1)$ och ange en ekvation för tangenten till grafen $y = s(x)$ i den punkt på kurvan där $x = 1$.

Uppgift 15. Visa att $2x^4 - x = 1$ har *exakt en* lösning x mellan -1 och 0 .

Uppgift 16. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $x^3 + y^3 + y^2 - 4x = 5$ i punkten $(-1, 1)$.

Uppgift 17. I Norge finns det flera långa tunnlar där hastighetsbegränsningar är noggrant övervakade. För att kontrollera att förare håller hastighetsbegränsningarna används kameror som registrerar tidpunkten då ett fordon kör in i och ut ur tunneln. Genom att jämföra dessa tidpunkter och tunnelns längd kan myndigheterna bestämma om föraren har kört för fort.

En tunnel i Norge är 10 km lång. Hastighetsbegränsningen i tunneln är 80 km/h. En bil kör in i tunneln vid tidpunkten 12:00 och kör ut vid tidpunkten 12:07. Använd medelvärdessatsen för att visa att föraren har kört för fort vid minst en tidpunkt.

Uppgift 18. Betrakta funktionen $f(x) = \cos(x^2)$. Beräkna $f^{(n)}(x)$ för $n = 1, 2, 3$.

HEMUPPGIFTER

Uppgift 19. Derivera med avseende på x och ange för vilka x derivatan existerar!

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(b) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Uppgift 20. Derivera med avseende på x och ange för vilka x derivatan existerar!

(a) $f(x) = x \tan x$

(b) $f(x) = x^2 \sin x$

(c) $f(x) = \sin^2 x$

Uppgift 21. Derivera med avseende på x och ange för vilka x derivatan existerar!

(a) $f(x) = \sqrt{x} \sin \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \cos(\tan x)$

(c) $f(x) = \tan x - \tan^2 x$

Uppgift 22. Derivera med avseende på x och ange för vilka x derivatan existerar!

(a) $f(x) = \frac{2x+3}{1-5x}$

(b) $f(x) = (2x-1)^2 \cos^2 x$

(c) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$

Uppgift 23. Bestäm tangenten till funktionsgrafen $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ om

(a) $f(x) = x\sqrt{x}$ och $a = 4$

(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ och $a = 2$

(c) $f(x) = x \sin x$ och $a = \pi/3$

(d) $f(x) = \cos 2x$ och $a = \pi/6$

(e) $f(x) = \tan x$ och $a = \pi/4$

(f) $f(x) = x^3 - 3x^2$ och $a = 2$

Uppgift 24. Låt $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$. Använd linjär approximation kring $x = 2$ för att ge ett närmevärde till $f(2.1)$.

Uppgift 25. Låt $f(x) = \sqrt{x}$. Bestäm en ekvation för tangenten till funktionskurvan $y = f(x)$ i den punkt på kurvan som har x -koordinat 100. Använd linjär approximation av f kring $x = 100$ för att ge ett närmevärde till $\sqrt{104}$.

Uppgift 26. Låt $f(x) = \tan x$. Använd linjär approximation av f kring $x = \pi/4$ för att ge ett närmevärde till $\tan \frac{\pi}{5}$.

Uppgift 27. Låt $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$. Använd linjär approximation av f kring $x = 2$ för att ge ett närmevärde till $f(2.5)$.

Uppgift 28. Arean av mantelytan hos en rät cirkulär kon med höjden h och bottenytans radie r ges av uttrycket $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$. Givet en sådan kon med höjd 8 dm och bottenradie 6 dm. Använd linjär approximation för att beräkna ungefär hur mycket mantelytans area ändras om radien i denna kon ökas med 0.5 dm.

Uppgift 29. Avgör om f är (strängt) växande eller avtagande på intervallet $[0, 1]$ om

(a) $f(t) = t^3 - 3t^2 + t$

(b) $f(t) = t \sin t$

(c) $f(t) = t^3 - 3t$

(d) $f(t) = \sin t \cos t - t$

Uppgift 30. För nedanstående funktioner, svara på följande frågor. Vad är definitionsmängden? I vilka punkter är funktionen kontinuerlig? Vad är derivatan? I vilka punkter är funktionen deriverbar?

(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

Uppgift 31. Bestäm med implicit derivering en ekvation för tangenten till kurvan

$$x^5 + y^4 + x^3 + y^2 + x + 1 = 0 \text{ i punkten } (-1, 1).$$

Uppgift 32. Bestäm $f'''(0)$ om $f(x) = \ln(x + 1)$

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Om uppgifterna ovan är för svåra kan det vara lämpligt att först lösa några av de enklare uppgifterna från kursboken. Men man behöver nog inte lösa alla de rekommenderade uppgifterna ur boken.

Kapitel 2.1: 5, 7. Kapitel 2.2: 1, 3, 11, 26, 27, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47. Kapitel 2.3: 1, 7, 11, 17, 25, 33, 35, 47. Kapitel 2.4: 3, 5, 11, 18, 23, 30, 31, 37. Kapitel 2.5: 13, 15, 23, 29, 31, 35, 45, 62. Kapitel 2.6: 3, 9. Kapitel 2.7: 1, 3, 11, 13, 23, 29. Kapitel 2.8: 5, 13, 21, 27. Kapitel 2.9: 3, 9, 13. Kapitel 2.11: 5, 7, 13, 16, 17, 18, 19.

SVÅRARE UPPGIFTER

Uppgift 33. Bevisa produktregeln för derivator.

Uppgift 34. Bevisa medelvärdessatsen.

Uppgift 35. Avgör om nedanstående funktioner har något största respektive minsta värde. Bestäm också max och min om de finns.

(a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \in (0, 1]$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{om } x \in (0, 1] \\ 1, & \text{om } x = 0 \end{cases}$

Uppgift 36. Låt

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Visa att att $f'(0) = 1$ men att varje intervall som innehåller $x = 0$ också innehåller punkter där $f'(x) < 0$. (Det följer att f inte är strängt växande i något intervall som innehåller $x = 0$ trots att $f'(0) > 0$.)

TENTAMENSPROBLEM

Tentamensproblemen är av varierande svårighetsgrad. Generellt betyder högre nummer på uppgiften svårare problem. De är avsedda att ge en uppfattning om vilken typ av uppgifter som kan förekomma på tentamen. Du hittar tidigare tentamen och lösningar till dem på Canvas.

2016-10-25: 7

2017-03-17: 7

2016-06-10: 6

2017-10-24: 2

2018-03-12: 4

2019-01-07: 6

2020-10-15: 6

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. (a) Alla $x \neq (2n+1)\pi$, n godtyckligt heltal. Dvs $x \neq \pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \dots$
- (b) Samma som ovan.
- (c) $f'(x) = \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}$
- (d) Samma som (a) och (b).
2. (a) Alla x
- (b) Samma svar som i (a).
- (c) $g'(x) = \cos^2 x - 2x \cos x \sin x$.
- (d) Samma svar som (a) och (b).
3. (a) Definitionsmängden är alla reella tal t .
- (b) Funktionen är kontinuerlig överallt.
- (c) För $t > -1$ är $h'(t) = 1 + 114t(1+3t^2)^{18}$. För $t < -1$ är $h'(t) = -1 + 114t(1+3t^2)^{18}$
- (d) Funktionen är deriverbar överallt utom i punkten $t = -1$.
4. (a) $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$ eller om man hellre vill: $-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$ för $x > 0$
- (b) $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ är definierat för $x \neq -d/c$.
- (c) $-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ är definierat för $x < 1$
- (d) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ är definierat för alla x
- (e) $\cos x$ om $2n\pi < x < (2n+1)\pi$ och $-\cos x$ om $(2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi$, n godtyckligt heltal. Definierat för alla $x \neq n\pi$, n heltal.
- (f) $-(\sin(\sin x^2)) \cdot (\cos x^2) \cdot 2x$, definierat för alla x
5. Högerderivatan är 2 och vänsterderivatan är 2. Funktionen är deriverbar i punkten $x = 1$.
6. Högerderivatan existerar ej (gränsvärdet $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \infty$) och vänsterderivatan är 4. Funktionen är ej deriverbar i punkten $x = 1$.
7. Tangentlinjen: $y - 3 = 11(x - 2)$. Normallinjen: $y - 3 = -\frac{1}{11}(x - 2)$.

8. $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$. Vi får $\sqrt{4.2} \approx 2.05$
9. $y + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
10. Ja, det kan den. Tag t ex $f(x) = x^3$. Detta är en strängt växande funktion, och $f'(0) = 0$.
11. Strängt växande på intervallen $x \geq 2$ och $x \leq 0$. Strängt avtagande på intervallet $0 \leq x \leq 2$.
12. Medelvärdessatsen säger att det finns ett tal $c \in (0, 2)$ så att $f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = 1$. Vi får att $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
13. Funktionen är strängt avtagande på intervallen $\frac{(2n+1)\pi}{2} < x < \frac{(2n+3)\pi}{2}$ för godtyckligt heltal n . Funktionen är inte växande på något intervall. (Tips: $\tan x$ är inte definierat när $\cos x = 0$).
14. (a) Funktionen är deriverar överallt utom i punkterna $x = 0$ och $x = 2$.
- (b) $s'(1) = 1$ och den sökta tangentlinjens ekvation är $y = x + 2$.
15. Sätt $f(x) = 2x^4 - x - 1$. Då är ekvationen ekvivalent med att $f(x) = 0$. Eftersom $f'(x) < 0$ på det aktuella intervallet är f strängt avtagande och det kan finnas högst en lösning till $f(x) = 0$. Eftersom $f(-1) = 2$ och $f(0) = -1$ och f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[-1, 0]$ och 0 är ett tal mellan -1 och 2 , så följer av satsen om mellanliggande värden att det finns minst en lösning till $f(x) = 0$. Det finns alltså exakt en lösning till $f(x) = 0$, dvs till ekvationen i uppgiften.
16. $y - 1 = \frac{1}{5}(x + 1)$ (Tips: implicit derivering).
17. Låt $s(t)$ vara sträckan (km) vid tidpunkten t (h). Då ger medelvärdessatsen att det finns ett $c \in (t_{in}, t_{ut})$ så att $s'(c) = \frac{s(t_{ut}) - s(t_{in})}{t_{ut} - t_{in}} = 600/7 > 80$, dvs föraren har kört för fort.
18. $f'(x) = -2x \sin x^2$,
 $f''(x) = -2 \sin x^2 - 4x^2 \cos x^2$,
 $f'''(x) = -12x \cos x^2 + 8x^3 \sin x^2$.
19. (a) $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$ eller om man hellre vill: $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ för $x > 0$
- (b) $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ för $x \neq 0$
20. (a) $\tan x + x(1 + \tan^2 x)$ eller om man hellre vill: $\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$ för $x \neq \pi/2 + n\pi$
- (b) $2x \sin x + x^2 \cos x$ för alla x
- (c) $2 \sin x \cos x$ för alla x (eller om man hellre vill $\sin 2x$)

21. (a) $\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} + \frac{1}{2} \cos \sqrt{x}$ för $x > 0$
- (b) $-(\sin(\tan x))(1 + \tan^2 x)$ för $x \neq \pi/2 + n\pi$
- (c) $1 + \tan^2 x - 2(\tan x)(1 + \tan^2 x)$ för $x \neq \pi/2 + n\pi$
22. (a) $\frac{17}{(1-5x)^2}$ för $x \neq 1/5$
- (b) $4(2x - 1) \cos^2 x - (2x - 1)^2 2 \cos x \sin x$, för alla x
- (c) $\frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x}{x^4}$ för $x \neq 0$
23. (a) $y = 8 + 3(x - 4)$
- (b) $y = x - 4$
- (c) $y = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{3\sqrt{3}+\pi}{6}(x - \frac{\pi}{3})$
- (d) $y = \frac{1}{2} - \sqrt{3}(x - \frac{\pi}{6})$
- (e) $y = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4})$
- (f) $y = -4$
24. $f(2.1) \approx -1.9$
25. Tangent: $y = 10 + \frac{1}{20}(x - 100)$. $\sqrt{104} \approx 10.2$
26. $\tan \frac{\pi}{5} \approx 1 - \frac{\pi}{10}$
27. $f(2.5) \approx 10$
28. Areal ökar med ungefär $68\pi/10$ kvadratdecimeter.
29. (a) Nej. (På intervallet $[0, 1]$ är derivatan positiv mellan 0 och $1 - \sqrt{2/3}$ och sedan negativ, vilket betyder att funktionen först är strängt växande och sedan strängt avtagande med ett lokalt max i $1 - \sqrt{2/3}$.)
- (b) Funktionen är strängt växande på intervallet $[0, 1]$ eftersom derivatan är positiv på det inre av intervallet och funktionen är kontinuerlig ut till ändpunkterna.
- (c) Funktionen är strängt avtagande på intervallet $[0, 1]$ eftersom derivatan är negativ på det inre av intervallet och funktionen är kontinuerlig ut till ändpunkterna.
- (d) Funktionen är strängt avtagande på intervallet $[0, 1]$ eftersom derivatan är negativ på det inre av intervallet och funktionen är kontinuerlig ut till ändpunkterna.
30. (a) Definitionsmängden är alla $x \geq 0$. Funktionen är kontinuerlig för alla $x \geq 0$. Derivatan är $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Funktionen är deriverbar för alla $x > 0$.

(b) Definitionsmängden är alla $x \neq n\pi$, n heltal. Funktionen är kontinuerlig för alla $x \neq n\pi$. Derivatan är $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$. Funktionen är deriverbar för alla $x \neq n\pi$.

31. $y = 1 - \frac{3}{2}(x + 1)$

32. 2

33. -

34. -

35. (a) Största värde saknas, minsta värdet är $\sin 1$

(b) Eftersom f är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[0, 1]$ så finns garanterat ett största och ett minsta värde. Största värdet är 1, minsta värdet är $\sin 1$

Det går att se att derivatan är negativ i intervallet $(0, 1)$ men det är inte lätt!

36. För att visa att $f'(0) = 1$ använd definitionen av derivatan.



Institutionen för Matematik

SF1625

Envariabelanalys

Läsåret 2025-2026

Albin Eriksson Östman

Modul 3: Transcendenta funktioner och ODE

I denna modul introduceras begreppet **invers** funktion och som exempel på det några nya klasser av funktioner: exponentialfunktioner, logaritmfunktioner och inversa trigonometriska funktioner. Dessutom introduceras en viss sorts differentialekvationer, nämligen linjära ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter.

Det är viktigt att du lär dig de grundläggande egenskaperna hos de funktioner du möter i det här kapitlet. Du måste behärska potenslagar och logaritmlagar bra. Samma sak gäller för egenskaperna hos arcus-funktionerna. Du måste också bli bra på att derivera dessa funktioner och mer komplicerade funktioner där dessa ingår.

Differentialekvationerna i denna modul kan lösas med en speciell metodik. Med hjälp av karaktäristiska ekvationen hittar man den allmänna homogena lösningen y_h . Med hjälp av ansättning hittar man sedan någon partikulärlösning y_p . Sedan får man lösningen $y_h + y_p = y$. Om initialvillkor är givna så använder man dem för att bestämma konstanterna i lösningen y .

LÄSANVISNINGAR

Hänvisningar utan hakparentes gäller upplaga 9, och hänvisningar inom hakparentes gäller upplaga 10.

Kapitel 3.1 introducerar de viktiga begreppen “inverterbar funktion” och “inversfunktion”, samt en formel för inversens derivata. När vi fortsätter med exponentialfunktioner, logaritmer och arcusfunktioner är kapitel 3.1 den grund vi står på.

Kapitel 3.2 respektive 3.3 ger två olika vägar att logiskt bygga teorin för exponentialfunktioner och logaritmer. Slutresultat blir (förstås) detsamma. Det är mycket viktigt att väl behärska räkning med exponentialfunktioner och logaritmer och att kunna logaritmlagarna och potenslagarna som ett rinnande vatten. Se till att skaffa dig egna exempel med vars hjälp du kan testa rimligheten hos potenslagar och logaritmlagar, och se till att du kan härleda loglagarna från potenslagarna och vice versa.

Från kapitel 3.4 ska du kunna satsen Theorem 5 (några standardgränsvärden), och också kunna formulera, tolka och lösa differentialekvationer av typen $y'(t) = ky(t)$ (tillväxtproblem). Avsnittet "Logistic Growth" ingår ej.

Hela kapitel 3.5 är viktigt, utom det på slutet om inverser till $\sec$, $\csc$ och $\cot$.

Kapitel 3.6. Det räcker att kunna definitionen på $\sinh$ och $\cosh$.

Kapitel 3.7 och 18.6 [19.6], sid 1025 - 1029 [1043 - 1047] (dvs EJ avsnitten Variation of Parameters eller Maple Calculations). Du ska kunna lösa första och andra ordningens linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter, såväl homogena som inhomogena, med eller utan begynnelsevillkor, och kunna modellera och tolka lösningar i den typ av tillämpningar som ges i kapitel 3.7.

UPPGIFTER TILL WORKSHOP 5

Under workshopen arbetar du med uppgifterna nedan, antingen själv eller i grupp. Om du inte kan lösa en uppgift, fundera på precis vad det är du inte förstår. Är det ett begrepp som är oklart? Är det en metod som du inte kan använda? Gå tillbaka till boken eller anteckningarna och se om du kan hitta svaret där. Om inte, fråga en kamrat eller läraren. Be bara om hjälp med precis det du inte förstår, inte om hela lösningen på uppgiften. Det är du som ska arbeta på workshopen!

Uppgift 1. Låt $f(x) = \frac{e^{kx}}{1 + e^{kx}}$.

- (a) Bestäm definitionsmängden till f .
- (b) I vilka punkter är f kontinuerlig?
- (c) Bestäm $f'(x)$.
- (d) I vilka punkter är f deriverbar?

Uppgift 2. Låt $g(x) = x \ln x - x$.

- (a) Bestäm definitionsmängden till g .
- (b) I vilka punkter är g kontinuerlig?
- (c) Bestäm $g'(x)$.
- (d) I vilka punkter är g deriverbar?

Uppgift 3. Låt $h(t) = \arctan t + \arctan \frac{1}{t}$.

- (a) Bestäm definitionsmängden till h .
- (b) I vilka punkter är h kontinuerlig?
- (c) Bestäm $h'(t)$.
- (d) I vilka punkter är h deriverbar?
- (e) Rita funktionsgrafen $y = h(t)$.

Uppgift 4. Derivera nedanstående uttryck med avseende på x och ange i vilka punkter derivatan existerar.

- (a) xe^{-x} .
- (b) xe^{-x^2} .
- (c) $\ln \sqrt{1+x^2}$.
- (d) $e^{-|x|}$.
- (e) $e^{2x} \sin 3x$.
- (f) $\arcsin \sqrt{x}$.

Uppgift 5. Bestäm följande gränsvärden.

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^x - x^2}{1 - e^x}$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x^7)$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x \cos(x) + \ln(x)}{1 + x^2}$

Uppgift 6. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $y = \ln x$ i den punkt på kurvan som har x -koordinat 1. Kan du med hjälp av tangenten ge ett närmevärde till $\ln 1.1$?

Uppgift 7. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $y = e^{-x^2}$ i den punkt på kurvan som har x -koordinat -1 .

Uppgift 8. På vilka intervall är funktionen $f(x) = xe^{-x^2/2}$ strängt växande?

Uppgift 9. Förenkla nedanstående uttryck så långt som möjligt.

(a) $2 \ln 6 - \ln 4 - \ln 9$

(b) $\ln(e^{2x} \cdot e^{-x})$

(c) $\arccos \frac{1}{2}$

(d) $\sin(\arccos x)$

(e) $\arctan \sqrt{3}$

Uppgift 10. Avgör om dessa funktioner är inverterbara och bestäm inversen om det går. Bestäm också inversens definitions- och värdemängd.

(a) $f(x) = |x + 1| + 2$

(b) $f(x) = 2 + \ln(x + 1)$

Uppgift 11. Här är en uppgift om inverser.

(a) Bestäm inversen till funktionen $f(x) = 1 + e^{3x}$. Ange också inversens definitionsmängd och värdemängd.

(b) Hur kan du med hjälp av derivata visa att funktionen $g(x) = x + e^{3x}$ är inverterbar utan att räkna ut inversen?

UPPGIFTER TILL WORKSHOP 6

Under workshopen arbetar du med uppgifterna nedan, antingen själv eller i grupp. Om du inte kan lösa en uppgift, fundera på precis vad det är du inte förstår. Är det ett begrepp som är oklart? Är det en metod som du inte kan använda? Gå tillbaka till boken eller anteckningarna och se om du kan hitta svaret där. Om inte, fråga en kamrat eller läraren. Be bara om hjälp

med precis det du inte förstår, inte om hela lösningen på uppgiften. Det är du som ska arbeta på workshopen!

Uppgift 12. Lös initialvärdesproblemet (tillväxtproblemet)

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{2}(y(t) - 1) \\ y(3) = 2. \end{cases}$$

Uppgift 13. Lös följande differentialekvationer.

- (a) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0.$
- (b) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 10.$
- (c) $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0.$
- (d) $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = t + 1.$

Uppgift 14. Lös differentialekvationen

- (a) $y' + 3y = 13 \sin(2t)$
- (b) $y' + 3y = 6t + 17.$

Uppgift 15. Lös initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 16e^{-t} \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Uppgift 16. Lös initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Uppgift 17. Bestäm en lösning $y(t)$ till differentialekvationen $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0$ sådan att $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{t} = 1$. Kan det finnas flera?

Uppgift 18. Avgör om $f(x) = x - \arctan x$ är (strängt) växande eller avtagande. Har f något största eller minsta värde? Bestäm dessa i så fall.

Uppgift 19. Låt $f(t) = t - \arcsin t$. Har f något största eller minsta värde? Bestäm dessa i så fall!

HEMUPPGIFTER

Uppgift 20. Beräkna / förenkla så långt som möjligt.

(a) $\ln 16 - \ln 8$

(b) $\frac{e^{2x}}{e^x} \cdot e^{-x}$

(c) $\ln x^2 - 2 \ln x$

Uppgift 21. Beräkna / förenkla så långt som möjligt.

(a) $\ln tx - \ln x$

(b) $\arctan 1$

(c) $\arcsin \frac{1}{2}$

Uppgift 22. Beräkna / förenkla så långt som möjligt.

(a) $\arccos \frac{1}{2}$

(b) $\arccos 0$

(c) $\lim_{u \rightarrow \infty} \arctan u$

Uppgift 23. Beräkna / förenkla så långt som möjligt.

(a) $\ln e^t$

(b) $e^{\ln t}$

(c) $\ln e$

Uppgift 24. Beräkna / förenkla så långt som möjligt.

(a) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$

(b) $\sin(\arcsin \frac{1}{3})$

(c) $\cos(\arccos \frac{1}{3})$

Uppgift 25. Beräkna / förenkla så långt som möjligt.

(a) $\sin(\arccos \frac{1}{3})$

(b) $\tan(\arctan x)$

(c) $\arctan(\tan \frac{5\pi}{4})$

Uppgift 26. Derivera med avseende på x och ange för vilka x derivatan existerar.

(a) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$

(b) $f(x) = \ln \sqrt{1+x^2}$

(c) $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$

(d) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$

(e) $f(x) = x \arccos x$

(f) $f(x) = x \ln x - x$

(g) $f(x) = \ln |x|$

(h) $f(x) = e^{\arcsin x}$

Uppgift 27. Låt $f(x) = \arctan x$. Bestäm en ekvation för tangenten till funktionskurvan $y = f(x)$ i origo. Använd linjär approximation kring $x = 0$ för att ge ett närmevärde till $\arctan \frac{1}{5}$.

Uppgift 28. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = e^x$ i den punkt på kurvan där x -koordinaten är 0. Bestäm med hjälp av linjär approximation ett närmevärde till $e^{1/10}$.

Uppgift 29. Hur många lösningar har ekvationen $e^x - \arccos x = 0$?

Uppgift 30. Hur många lösningar har ekvationen $\arcsin x = \arccos x$?

Uppgift 31. Lös dessa differentialekvationer:

(a) $y'(t) + 17y(t) = 0$

(b) $y'(t) + 17y(t) = 1$

(c) $y'(t) + 17y(t) = e^t$

Uppgift 32. Lös dessa differentialekvationer:

(a) $y''(t) - 8y'(t) + 15y(t) = 0$

(b) $y''(t) + 2y'(t) + 17y(t) = 1$

(c) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t + 1$

(d) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}$

Uppgift 33. Lös dessa initialvärdesproblem:

(a) $y'(t) + 15y(t) = 0$, med initialvillkoret $y(0) = 10$

(b) $y''(t) + 2y'(t) + 17y(t) = 1$ med initialvillkoren $y(0) = 1/17$ och $y'(0) = 4$

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Om uppgifterna ovan är för svåra kan det vara lämpligt att först lösa några av de enklare uppgifterna från kursboken. Men man behöver nog inte lösa alla de rekommenderade uppgifterna ur boken.

Kapitel 3.1: 3, 9, 23. Kapitel 3.2: 3, 5, 9, 15, 25, 29. Kapitel 3.3: 3, 5, 7, 9, 19, 21, 31, 33, 43, 51, 59. Kapitel 3.4: 1, 3, 5, 9, 11, 17, 23, 25. Kapitel 3.5: 1, 3, 5, 7, 13, 19, 21, 23, 35. Kapitel 3.7: 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 29. Kapitel 18.6: 1, 3, 5, 7.

TENTAMENSPROBLEM

Tentamensproblemen är av varierande svårighetsgrad. Generellt betyder högre nummer på uppgiften svårare problem. De är avsedda att ge en uppfattning om vilken typ av uppgifter som kan förekomma på tentamen. Du hittar tidigare tentamen och lösningar till dem på Canvas.

2017-01-09: 8

2016-03-22: 6

2017-01-09: 4

2017-03-17: 4

2018-10-23: 3

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. (a) Funktionen är definierad för alla reella tal x .
- (b) Funktionen är kontinuerlig överallt.
- (c) $f'(x) = \frac{ke^{kx}}{(1 + e^{kx})^2}$.
- (d) Funktionen är deriverbar överallt.
2. (a) Alla $x > 0$.
- (b) Samma svar som i (a).
- (c) $g'(x) = \ln x$.
- (d) Samma svar som (a) och (b).
3. (a) Definitionsmängden är alla reella tal $t \neq 0$.
- (b) Funktionen är kontinuerlig överallt utom i origo.
- (c) h är deriverbar överallt utom i origo och för alla $t \neq 0$ gäller att $h'(t) = 0$
- (d) Som (c).
- (e) $h(t) = \pi/2$ för alla $t > 0$ och $h(t) = -\pi/2$ för alla $t < 0$. Nu är det lätt att rita grafen.
4. (a) $e^{-x}(1 - x)$, existerar för alla x .
- (b) $e^{-x^2}(1 - 2x^2)$, existerar för alla x .
- (c) $\frac{x}{1 + x^2}$ definierat för alla x .
- (d) $-e^{-x}$ om x är positivt och e^x om x är negativt. Existerar för alla $x \neq 0$.
- (e) $2e^{2x} \sin 3x + 3e^{2x} \cos 3x$, existerar för alla x .
- (f) $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$, existerar när $0 < x < 1$.
5. (a) -2
- (b) 0
- (c) 1
6. Tangent: $y = x - 1$. Och $\ln 1.1 \approx 0.1$

7. $y - \frac{1}{e} = \frac{2}{e}(x + 1).$

8. Funktionen är strängt växande på intervallet $-1 \leq x \leq 1$.

9. (a) 0

(b) x

(c) $\pi/3$

(d) $\sqrt{1 - x^2}$ om $-1 \leq x \leq 1$ (annars är uttrycket inte definierat).

(e) $\pi/3$

10. (a) Ej inverterbar (T.ex. är funktionsvärdena i 0 och -2 lika, så funktionen är inte injektiv)

(b) Inversen ges av $f^{-1}(x) = e^{x-2} - 1$. Inversens definitionsmängd är alla tal och inversens värdemängd är alla tal större än -1 .

11. (a) $f^{-1}(x) = \frac{\ln(x-1)}{3}$. Definitionsmängden för f^{-1} är alla $x > 1$. Värdemängden är alla reella tal.

(b) Eftersom $g'(x) = 1 + 3e^{3x} > 0$ för alla x så är g strängt växande och därmed inverterbar.

12. $y(t) = 1 + e^{\frac{t-3}{2}}.$

13. (a) $y(t) = Ce^t + De^{2t}$, där C och D är godtyckliga konstanter.

(b) $y(t) = Ce^t + De^{2t} + 5$, där C och D är godtyckliga konstanter.

(c) $y(t) = e^{2t}(A \cos t + B \sin t)$, där A och B är godtyckliga konstanter.

(d) $y(t) = e^{2t}(A \cos t + B \sin t) + \frac{1}{5}t + \frac{9}{25}$, där A och B är godtyckliga konstanter.

14. (a) $Ce^{-3t} + 3 \sin(2t) - 2 \cos(2t)$, C godt reellt tal.

(b) $Ce^{-3t} + 2t + 5$, C godt reellt tal.

15. $y(t) = e^{3t} - te^{3t} + e^{-t}.$

16. $y(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{t}{2} \cos t.$

17. $y(t) = e^{-t} \sin t$, det finns bara en.

18. f är strängt växande på hela $\mathbf{R}$ (derivatan är positiv överallt utom i origo där den är noll). Största och minsta värde saknas.

19. Funktionen f är kontinuerlig på hela sin definitionsmängd, som är det slutna begränsade intervallet $[-1, 1]$ så den har ett största och ett minsta värde. Derivatan är negativ på det inre av intervallet utom i en punkt, origo, där den är noll, så f är strängt avtagande. Därmed är största värdet $f(-1) = -1 + \pi/2$ och minsta värdet $f(1) = 1 - \pi/2$

20. (a) $\ln 2$

(b) 1

(c) 0

21. (a) $\ln t$ (förutsatt att både t och x är positiva)

(b) $\pi/4$

(c) $\pi/6$

22. (a) $\pi/3$

(b) $\pi/2$

(c) $\pi/2$

23. (a) t

(b) t

(c) 1

24. (a) $-1/2$

(b) $1/3$

(c) $1/3$

25. (a) $2\sqrt{2}/3$

(b) x

(c) $\pi/4$

26. (a) $\frac{4x^2 e^{x^2} - 2e^{x^2}}{4x^2}$ (kan förenklas), $x \neq 0$

(b) $\frac{x}{1+x^2}$ för alla x

(c) $-\frac{1}{1+x^2}$, $x \neq 0$

(d) $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $0 < x < 1$

(e) $\arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$

(f) $\ln x, x > 0$

(g) $\frac{1}{x}, x \neq 0$

(h) $\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$

27. Tangent: $y = x. \arctan \frac{1}{5} \approx \frac{1}{5}$

28. Tangent: $y = 1 + x. e^{1/10} \approx 1 + \frac{1}{10} = 1.1$

29. En. (Derivatan är positiv så funktionen är strängt växande och av detta följer att det finns högst en lösning. Minst en lösning följer av satsen om mellanliggande värden för funktionen $f(x) = e^x - \arccos x$. Obs att ekvationen bara är relevant för x mellan -1 och 1 .)

30. En. Se ledtråd till förra uppgiften.

31. (a) $y(t) = Ce^{-17t}, C$ godt reellt tal.

(b) $y(t) = \frac{1}{17} + Ce^{-17t}, C$ godt reellt tal.

(c) $y(t) = \frac{1}{18}e^t + Ce^{-17t}, C$ godt reellt tal.

32. (a) $y(t) = Ae^{5t} + Be^{3t}, A, B$ godt reella tal.

(b) $y(t) = \frac{1}{17} + e^{-t}(A \cos 4t + B \sin 4t), A, B$ godt reella tal.

(c) $(At + B)e^{-t} + t - 1, A, B$ godt reella tal.

(d) $(At + B)e^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t}, A, B$ godt reella tal. (obs resonans)

33. (a) $y(t) = 10e^{-15t}$

(b) $y(t) = e^{-t} \sin 4t + \frac{1}{17}$



Institutionen för Matematik

SF1625

Envariabelanalys

Läsåret 2025-2026

Albin Eriksson Östman

Modul 4: Tillämpningar av derivata och Taylorpolynom

Denna modul handlar om tillämpningar av derivata. Några exempel: hitta extrempunkter till en funktion (max och min), approximera en funktion (det kan gälla linjär approximation eller mer allmänt approximation med hjälp av **Taylors formel**), och kurvritning.

Att approximera funktioner med polynom är en vanlig och användbar tillämpning. Taylorpolynomet är den bästa lösningen till ett sådant problem. Du måste kunna bestämma Taylorpolynom till en given funktion, i en given punkt, till en given grad. Feltermen mellan funktionen och Taylorpolynomet är naturligtvis viktig att förstå och kunna ge en uppskattning av.

LÄSANVISNINGAR

Kapitel 4.1 innehåller ingen egentlig teori, men du ska kunna lösa problem av den typ som exemplifieras i detta kapitel.

Kapitel 4.3. l'Hospitals regel är en metod att beräkna vissa typer av gränsvärden. Ett alternativ är att använda Taylorutvecklingar istället (se Kapitel 4.10). Vilket man föredrar är oftast en smaksak men vid beräkning av gränsvärden då $x \rightarrow \infty$ är det dock ofta lättare med l'Hospitals regel (Taylorutveckling kräver i dessa fall först ett variabelbyte). Läs och lär hela kapitlet, studera också exemplen och observera de två varningarna ("BEWARE!") på sidan 232 och 233.

Kapitel 4.4 Viktigt och centralt kapitel att lära sig. Innehållet är till stor del repetition av sådant du lärt dig i gymnasiet, men formuleringarna är nog mer precisa och teorin grundligare. Observera också terminologin: En extrempunkt är en punkt x_0 i definitionsmängden på x -axeln, medan ett extremvärde är en punkt $f(x_0)$ i värdemängden. (Detta skiljer sig från den terminologi som vanligen används i gymnasieskolan där en extrempunkt är en punkt $(x_0, f(x_0))$ på funktionens graf.) Observera att Theorem 5 i kombination med Theorem 6 underlättar undersökningar på slutna intervall, medan funktioner definierade på öppna intervall kräver lite extra arbete när man söker extremvärden, till exempel genom att tillämpa Theorem 8.

Kapitel 4.5. På svenska säger man vanligen konvex och konkav för det som i läroboken kallas concave up respektive concave down. Lär dig definitionen av dessa begrepp (Definition 3), samt Definition 4 (inflektionspunkt) och hur konkaviteten hänger ihop med andraderivatet (Theorem 9). Det s k andra-derivata-testet (Theorem 10) är en konsekvens av Theorem 9.

Kapitel 4.6 Du ska kunna definitionerna av de tre typerna av asymptoter (Definitions 5, 6, och 7), och finna sådana.

Observera att $y = f(x)$ har sned asymptot $y = ax + b$ då $x \rightarrow \infty$ om och endast om

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$$

(och på samma sätt då $x \rightarrow -\infty$).

Du ska också kunna skissera funktionsgrafer med de metoder som visas i detta kapitel.

Kapitel 4.8 Du ska kunna lösa tillämpade extremvärdesproblem med de metoder som visas i exemplen.

Kapitel 4.9 om linjär approximation är ett viktigt kapitel. Du ska kunna genomföra linjär approximation med uppskattning av felet med hjälp av resultatet i Theorem 11. Observera resultaten i Kapitel 4.9 är specialfall av de mer allmänna resultatet om approximation med Taylorpolynom i Kapitel 4.10, och därför inte behöver memoreras separat.

Kapitel 4.10. Ett centralt och mycket viktigt kapitel! Läs och lär.

UPPGIFTER TILL WORKSHOP 7

Under workshopen arbetar du med uppgifterna nedan, antingen själv eller i grupp. Om du inte kan lösa en uppgift, fundera på precis vad det är du inte förstår. Är det ett begrepp som är oklart? Är det en metod som du inte kan använda? Gå tillbaka till boken eller anteckningarna och se om du kan hitta svaret där. Om inte, fråga en kamrat eller läraren. Be bara om hjälp med precis det du inte förstår, inte om hela lösningen på uppgiften. Det är du som ska arbeta på workshopen!

Uppgift 1. Betrakta funktionen $f(x) = xe^{-x}$.

- (a) Bestäm definitionsmängden till f , gör ett teckenschema för derivatan och bestäm alla lokala extrempunkter till f . Beräkna sedan eventuella relevanta gränsvärden och skissa kurvan $y = f(x)$.
- (b) Med hjälp av uppgift (a) kan du nu svara på dessa frågor:
 - (i) Vad är värdemängden till f ?
 - (ii) Har f något största eller minsta värde, vilka är dessa i så fall?

- (iii) Finns det något tal x sådant att $f(x) = 1$?
- (c) Finn alla inflektionspunkter till f och bestäm de intervall där f är konvex (concave up) respektive konkav (concave down).
- (d) Finn alla asymptoter till kurvan $y = f(x)$.

Uppgift 2. Betrakta funktionen $g(x) = \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$.

- (a) Bestäm definitionsmängden till g , gör ett teckenschema för derivatan och bestäm alla lokala extrempunkter till g . Beräkna sedan eventuella relevanta gränsvärden och skissa kurvan $y = g(x)$.
- (b) Med hjälp av uppgift (a) kan du nu svara på dessa frågor:
 - (i) Vad är värdemängden till g ?
 - (ii) Har g något största eller minsta värde, vilka är dessa i så fall?
 - (iii) Hur många lösningar har ekvationen $g(x) = 1/10$?

Uppgift 3. Låt $h(t) = t - \sin t$.

- (a) Bestäm alla kritiska punkter till h .
- (b) Bestäm alla lokala extrempunkter till h .
- (c) Avgör om h antar något största respektive minsta värde.

Uppgift 4. Låt den styckvis definierade funktionen f vara given av

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{om } x \leq 0, \\ (x - 1)e^{-x}, & \text{om } x > 0. \end{cases}$$

- (a) Bestäm för vilka x som f är kontinuerlig.
- (b) Bestäm f' och eventuella kritiska punkter till f .
- (c) Avgör om f antar något största respektive minsta värde och bestäm dessa om de finns.

Uppgift 5. Betrakta ekvationen $x^3 + x = 1$.

- (a) Visa med hjälp av derivata att ekvationen har högst en lösning.

- (b) Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värden att ekvationen har minst en lösning som ligger mellan 0 och 1.

Uppgift 6. Låt $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

- (a) Gör ett teckenschema för derivatan och bestäm alla lokala extrempunkter till f .
- (b) Bestäm alla asymptoter till kurvan $y = f(x)$.
- (c) Beräkna eventuellt relevanta gränsvärden och skissa kurvan $y = f(x)$.

Uppgift 7. Avgör om $f(x) = xe^{-x^2/2}$ har något största respektive minsta värde och bestäm i så fall dessa.

Uppgift 8. Avgör om $f(x) = |x-1| + \sqrt{x+1}$ antar något största respektive minsta värde när x varierar i intervallet $[-1, 2]$ och bestäm i så fall dessa.

Uppgift 9. En sfärisk tank med radie 5 dm fylls med vatten i en takt av 3 liter per minut. Hur snabbt stiger vattenytan i tanken vid den tidpunkt då djupet är 2 dm? Tips: Vattenvolymen V beror på vattendjupet d enligt formeln

$$V = \pi \frac{15d^2 - d^3}{3}.$$

Uppgift 10. Beräkna följande gränsvärden.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
- (b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{\tan h}$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos 2x}{\sin x - 3x}$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - e^x}{x^2}$.

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x}.$

(f) $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sin t - \sin 1}{t - 1}.$

UPPGIFTER TILL WORKSHOP 8

Under workshopen arbetar du med uppgifterna nedan, antingen själv eller i grupp. Om du inte kan lösa en uppgift, fundera på precis vad det är du inte förstår. Är det ett begrepp som är oklart? Är det en metod som du inte kan använda? Gå tillbaka till boken eller anteckningarna och se om du kan hitta svaret där. Om inte, fråga en kamrat eller läraren. Be bara om hjälp med precis det du inte förstår, inte om hela lösningen på uppgiften. Det är du som ska arbeta på workshopen!

Uppgift 11. Vid en provskjutning beräknas projektilen i ett lämpligt valt koordinatsystem följa kurvan $y = 1 - x^2$. Hur nära en bunker placerad i origo kommer projektilen?

Uppgift 12. I en punkt på kurvan $y = e^{-x}$, $x \geq 0$, dras en tangent till kurvan. Koordinataxlarna bildar tillsammans med tangenten en triangel. Vilken är den största area en sådan triangel kan ha?

Uppgift 13. Bestäm alla asymptoter till $f(x) = x - \arctan x + \frac{1}{x-1}$

Uppgift 14. Låt $f(x) = \ln(1+x)$.

- (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f kring punkten $x = 0$.
- (b) Använd Taylorpolynomet ovan för att approximera $\ln 2$, dvs $f(1)$.
- (c) Avgör om felet i approximationen i uppgift (b) är mindre än $1/3$.

Uppgift 15. Bestäm med hjälp av Taylorutveckling ett närmevärde till $\cos \frac{1}{10}$ med ett fel som är mindre än 10^{-5} .

Uppgift 16. Bestäm ett närmevärde till $\sqrt{104}$ med hjälp av ett lämpligt valt Taylorpolynom. Felet ska vara mindre än $5 \cdot 10^{-5}$.

Uppgift 17. Antag att $f(x) = x + 3x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ då $x \rightarrow 0$. Bestäm följande gränsvärden.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x^2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2}$

Uppgift 18. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$$

med hjälp av Taylorutveckling (inte med l'Hopitals regel).

Uppgift 19. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$$

med hjälp av Taylorutveckling (inte med l'Hopitals regel).

Uppgift 20. Bestäm Taylorpolynomet av grad 6 till $\sin(x^2)$ kring punkten $x = 0$ med hjälp av entydighetssatsen.

Uppgift 21. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \ln(1 + x^2)}{x^4}$$

med hjälp av Taylorutveckling (inte med l'Hopitals regel).

Uppgift 22. Visa olikheterna

(a) $\ln x \leq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ för alla $x \geq 1$.

(b) $e^x > 1 + x$ för alla $x \neq 0$.

HEMUPPGIFTER

Uppgift 23. Skissa grafen till funktionen $f(x) = xe^{-x}$ genom att göra en derivataundersökning, hitta alla lokala extrempunkter och beräkna relevanta gränsvärden.

Uppgift 24. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ genom att göra en derivataundersökning, hitta alla lokala extrempunkter och beräkna relevanta gränsvärden.

Uppgift 25. Skissa grafen till funktionen $f(x) = xe^{-x^2}$ genom att göra en derivataundersökning, hitta alla lokala extrempunkter och beräkna relevanta gränsvärden.

Uppgift 26. Låt $f(x) = e^{-x} \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Bestäm största och minsta värdet av funktionen om de finns.

Uppgift 27. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = \arctan x - \frac{1}{1+x^2}$. Har f något största eller minsta värde?

Uppgift 28. Hur många lösningar har ekvationen $x \ln x = -1/2$?

Uppgift 29. Låt $f(x) = e^{-1/x^2}$. Gör följande:

- (a) Bestäm definitionsmängden.
- (b) Avgör i vilka punkter f är kontinuerlig.
- (c) Beräkna $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ och $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- (d) Beräkna $f'(x)$ och ange i vilka punkter f är deriverbar.
- (e) Gör ett teckenschema för $f'(x)$
- (f) Skissa grafen $y = f(x)$ med hjälp av ovanstående.

Uppgift 30. På vilka intervall är $f(x) = xe^{-x}$ (strängt) konvex respektive konkav?

Uppgift 31. Beräkna dessa gränsvärden:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

(b) $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\arctan u}{u}$

Uppgift 32. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x) = \arctan x$ kring $x = 0$.

Uppgift 33. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x) = \tan x$ kring $x = \pi/4$.

Uppgift 34. Bestäm Taylorpolynomet av grad 3 till $\ln(1+x)$ kring $x = 0$ och använd det för att bestämma ett närmevärde till $\ln \frac{9}{10}$ med ett fel på högst $1/1000$.

Uppgift 35. Använd Taylorutveckling för att bestämma ett närmevärde till $1/\sqrt{e}$ med ett fel på högst $1/10$.

Uppgift 36. Använd Taylorutveckling för att bestämma ett närmevärde till $\cos \frac{1}{10}$ med ett fel mindre än 10^{-4} .

Uppgift 37. En silo i form av en 3 meter hög cylinder med radie 2 meter fylls på med vatten i en takt om 4 kubikmeter i timmen. Hur snabbt stiger vattenytan i cylindern vid den tidpunkt då vattenytan är 1 meter över bottenplattan?

Uppgift 38. Bestäm den punkt på hyperbelgrenen $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$, som ligger närmast punkten $(0, 1)$. Bestäm också det minsta avståndet.

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Om uppgifterna ovan är för svåra kan det vara lämpligt att först lösa några av de enklare uppgifterna från kursboken. Men man behöver nog inte lösa alla de rekommenderade uppgifterna ur boken.

Kapitel 4.1: 5, 7, 9, 16, 17. Kapitel 4.2: 7, 9. Kapitel 4.3: 1, 5, 17. Kapitel 4.4: 3, 14, 29, 35. Kapitel 4.5: 5, 11, 27, 31. Kapitel 4.6: 3, 5, 9, 17, 31. Kapitel 4.8: 1, 7, 13, 21. Kapitel 4.9: 1, 3, 13, 30. Kapitel 4.10: 1, 5, 9

SVÅRARE UPPGIFTER

TENTAMENSPROBLEM

Tentamensproblemen är av varierande svårighetsgrad. Generellt betyder högre nummer på uppgiften svårare problem. De är avsedda att ge en uppfattning om vilken typ av uppgifter som kan förekomma på tentamen. Du hittar tidigare tentamen och lösningar till dem på Canvas.

2016-03-22: 4

2016-06-10: 4

2017-01-09: 5

2017-03-17: 6

2019-01-07: 5

2020-06-03: 5

2017-01-09: 6

2019-01-07: 3

2021-06-11: 5

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. (a) Definitionsmängden är hela reella axeln. Det finns en enda kritisk punkt nämligen $x = 1$. Teckenschema för derivatan ger att den kritiska punkten är en lokal och global maxpunkt. Maxvärdet är $f(1) = 1/e$. Gränsvärdet i oändligheten är 0. Gränsvärdet i minus oändligheten är $-\infty$.
 - (b)
 - (i) Alla reella tal mindre än eller lika med $1/e$.
 - (ii) Största värdet är $1/e$, minsta värde saknas.
 - (iii) Nej, eftersom funktionens största värde är $1/e$ som är mindre än 1
 - (c) Det finns en inflektionspunkt nämligen $x = 2$. Funktionen är konkav för $x < 2$ och konvex för $x > 2$.
 - (d) $y = 0$ är asymptot när $x \rightarrow \infty$. Inga andra asymptoter finns.
2. (a) Definitionsmängden är hela reella axeln. Det finns en enda kritisk punkt nämligen $x = 1$. Teckenschema för derivatan ger att den kritiska punkten är en lokal och global maxpunkt. Maxvärdet är $g(1) = \pi/4 - \ln \sqrt{2}$. Gränsvärdet i oändligheten är $-\infty$. Gränsvärdet i minus oändligheten är $-\infty$.
 - (b)
 - (i) Alla reella tal mindre än eller lika med $\pi/4 - \ln \sqrt{2}$.
 - (ii) Största värdet är $\pi/4 - \ln \sqrt{2}$, minsta värde saknas.
 - (iii) Två, eftersom $1/10$ är mindre än $\pi/4 - \ln \sqrt{2}$ (titta på grafen).
3. (a) Det finns oändligt många kritiska punkter (punkter där derivatan är noll), nämligen punkterna $n2\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.
 - (b) Funktionen har inga lokala extrempunkter.
 - (c) Funktionen saknar största och minsta värde. (Den är strängt växande på hela reella axeln, de kritiska punkterna är allihop terrasspunkter (som alltså inte är extrempunkter)).
4. (a) Funktionen är kontinuerlig för alla $x \neq 0$.
 - (b)
$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ (2-x)e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Obs: strikta olikheter, f är inte deriverbar i $x = 0$.

Enda kritiska punkt är $x = 2$.

 - (c) f antar sitt största värde 3 (då $x = 0$) men inget minsta värde.
5. (a) Sätt $f(x) = x^3 + x - 1$. Ekvationen är då ekvivalent med $f(x) = 0$. Derivatan är positiv överallt, vilket medför att f är strängt växande och att högst en lösning kan finnas.
 - (b) Då $f(0) = -1$ och $f(1) = 1$ och f är kontinuerlig överallt följer av satsen om mellanliggande värden att det finns en lösning mellan 0 och 1.
6. (a) $f(x)$ är definierat för alla $x \neq 0$. Teckenschema för derivatan: Om $x < -1$ så är $f'(x) > 0$ och funktionen är alltså strängt växande. Om $x = -1$ så är $f'(x) = 0$.

Om $-1 < x < 0$ så är $f'(x) < 0$ och funktionen är alltså strängt avtagande. Om $x = 0$ så är $f(x)$ intedefinierat. Om $0 < x < 1$ så är $f'(x) < 0$ och funktionen är alltså strängt avtagande. Om $x = 1$ så är $f'(x) = 0$. Om $x > 1$ så är $f'(x) > 0$ och funktionen är alltså strängt växande. Det följer av teckenschemat att f har en lokal maxpunkt i $x = -1$ och en lokalminpunkt i $x = 1$.

(b) Eftersom $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ och $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ så är linjen $x = 0$ lodrät asymptot till kurvan. Med hjälp av omskrivningen $\frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$ ser vi att linjen $y = x$ är sned asymptot i $\pm\infty$.

(c) -

7. Ja, minsta värdet är $-1/\sqrt{e}$ och största värdet är $1/\sqrt{e}$. Se exempel 8 i bokens kap 4.6. Här måste man göra teckenschema för derivatan och beräkna gränsvärden i $\pm\infty$ för att veta om största/minsta värde finns.

8. Ja, den här funktionen är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet så största och minsta värde finns garanterat enligt max-min-satsen från Kapitel 1. Dessa kan antas i kritiska punkter, ändpunkter eller singulära punkter. Det finns en kritisk punkt $x = -3/4$, en singulär punkt $x = 1$ och ändpunkterna är -1 och 2 . Kolla dessa och se att minsta värdet är $\sqrt{2}$ (antas i den singulära punkten) och största värdet är $1 + \sqrt{3}$ (antas i högra ändpunkten).

9. Ytan stiger i takten $\frac{3}{16\pi}$ dm per minut.

10. (a) 1

(b) $1/2$

(c) $-1/3$ (Man kan inte använda L'Hôpitals regel här eftersom gränsvärdet man får när man deriverar täljare och nämnare inte existerar.)

(d) -1

(e) ∞ (Man ska inte använda L'Hôpitals regel här eftersom täljaren inte går mot noll, men nämnaren gör det. L'Hôpitals regel gäller för gränsvärden av typen $0/0$ eller ∞/∞ .)

(f) $\cos 1$

11. Minsta avståndet är $\sqrt{3}/2$ längdenheter.

12. Den största arean är $2e^{-1}$ (och antas då tangenten dras i punkten $(1, e^{-1})$).

13. Lodrät asymptot $x = 1$. Sned asymptot i ∞ är $y = x - \frac{\pi}{2}$. Sned asymptot i $-\infty$ är $y = x + \frac{\pi}{2}$.

14. (a) Det sökta polynomet är $p(x) = x - \frac{x^2}{2}$.

(b) $\ln 2 = f(1) \approx 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

(c) Felet i approximationen i (b) ges av $\frac{2/(c+1)^3}{3!} \cdot 1^3$ för något c mellan 0 och 1. Detta är högst $1/3$.

15. Formeln för feltermen ger att en Taylorutveckling av grad 3 räcker. (Då $\frac{d^3}{dx^3} \cos x|_{x=0} = 0$ blir utvecklingen i praktiken av grad 2). Detta ger $\cos \frac{1}{10} \approx 0.995$ med ett fel som är mindre än 10^{-5} .

16. Ett Taylorpolynom av grad 2 räcker. Detta ger $\sqrt{104} \approx 10.198$ med ett fel som är mindre än $5 \cdot 10^{-5}$.

17. (a) 0

(b) 1

(c) ∞

(d) 3

18. $-1/6$

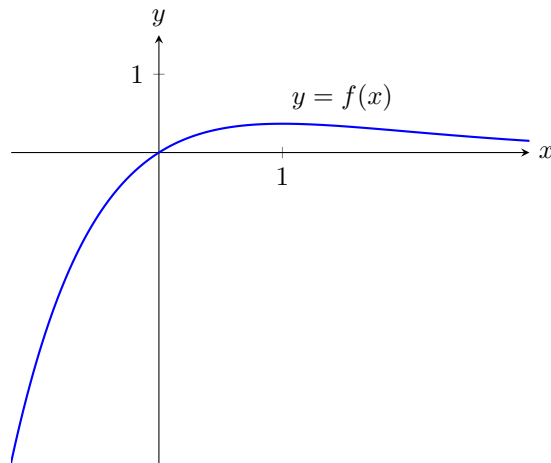
19. 1

20. $x^2 - \frac{x^6}{6}$

21. $1/2$

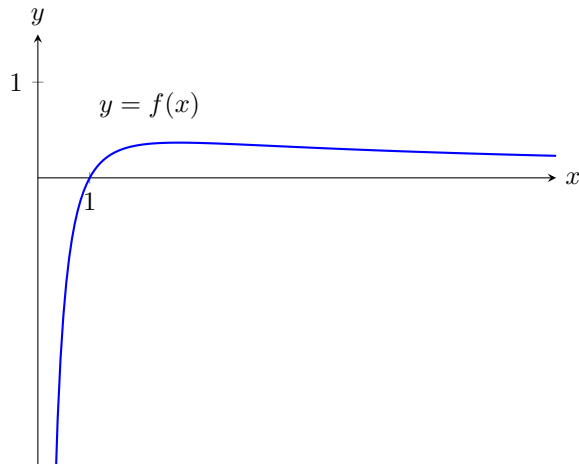
22. -

23.

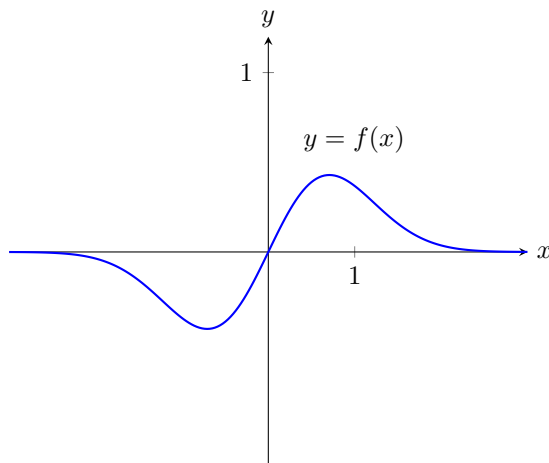


(Lokal (och globala) maxpunkt i $x = 1$)

24.

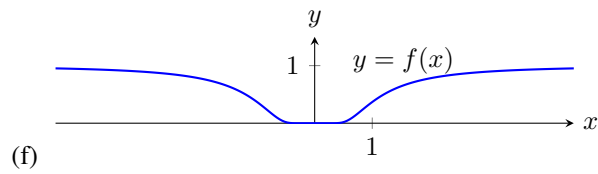
(Lokal och global maxpunkt i $x = e$)

25.

(Lokal och global maxpunkt i $x = 1/\sqrt{2}$, lokal och global minpunkt i $x = -1/\sqrt{2}$)26. Största värdet är 1, minsta värdet är $-e^{-3\pi/4}/\sqrt{2}$.27. $(-\pi/2, \pi/2)$, inget största eller minsta värde finns (funktionen är strängt växande)28. Inga lösningar finns (gör en derivataundersökning av $f(x) = x \ln x$ och konstatera att minsta värdet är $-1/e$ som är större än $-1/2$)29. (a) Alla $x \neq 0$ (b) Alla $x \neq 0$

(c) 1 respektive 0

(d) $f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}, x \neq 0$ (e) Derivatan är negativ då $x < 0$ och positiv då $x > 0$, derivatan i origo saknas.



30. Strängt konvex på $x \geq 2$, strängt konkav på $x \leq 2$. (kolla på andraderivatans tecken!)

31. (a) $1/2$

(b) 1

32. $p_2(x) = x$

33. $p_2(x) = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2$

34. $p_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ och närmevärdet är $-\frac{316}{3000}$

35. 2:a gradens taylorpolynom kring origo av e^x ger närmevärdet 0.625, där felet är mindre än $1/48$.

36. Andra gradens taylor runt origo ger närmevärdet 0.995, där felet faktiskt till och med är mindre än 10^{-5}

37. Ytan stiger med $1/\pi$ meter per timme.

38. Punkten är $(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$ och avståndet är $\sqrt{3/2}$



Modul 5: Integraler

Denna modul handlar om integraler. Det slås fast i en precis definition vad som menas med att en funktion är integrerbar på ett intervall och vad i så fall integralen av f över det intervallet är. Men det är inte definitionen man normalt använder för att räkna ut integraler, utan andra metoder som bygger på definitionen. Den viktigaste satsen är **integralkalkylens huvudsats** (the fundamental theorem of calculus) som säger att derivata och integral i någon mening är inversa operationer. En följd av detta är att man kan använda primitiv funktion (på engelska anti-derivative) för att räkna ut integraler. Eftersom det ofta är svårt att hitta primitiva funktioner, så har ett antal tekniker utvecklats för detta ändamål. De viktigaste är variabelsubstitution och partiell integration. För rationella funktioner kan partialbråksuppdelning (på engelska partial fractions) användas. I praktiken är förstås också numeriska metoder och programvara viktiga verktyg.

Det är viktigt att du blir bra på att integrera, så träna mycket.

LÄSANVISNINGAR

Kapitel 2.10. Här ska du kunna beteckningen för antiderivata, dvs primitiv funktion, och du ska kunna de primitiva funktioner som listas på s. 152 (utom de som involverar $\sec$ och $\csc$). Du ska också förstå begreppen differentialekvation och egynnessvärdesproblem (initialvärdesproblem) och kunna lösa sådana som i exemplen i detta kapitel.

Kapitel 5.1. Du ska kunna använda summa-notation och kunna formulera och använda summationsformlerna (a), (b), (d) i Theorem 1.

Kapitel 5.2. Du ska förstå och kunna genomföra areaberäkningar av den typ som görs i exemplen i kapitlet. Observera att detta är exempel på Riemannsummor som studeras i kommande kapitel.

Kapitel 5.3 - 5.5. Ett viktigt teoriavsnitt med definitionen av den bestämda integralen och härledning av dess egenskaper. Som höjdpunkt visas huvudsatsen om sambandet mellan derivata och integral. Även om detta samband är så välbekant att det verkar självklart är det i själva verket ett djupt resultat som bevisas - tänk på derivatans definition och den bestämda integralens definition, det är inte uppenbart ifrån dessa definitioner att den bestämda

integralen ges av skillnad i anti-derivata. Observera att det är integralens definition som gör att vi sedan kan använda integralen för beräkning av areor (och, som vi kommer att se, andra kvantiteter som längder, volymer, massa, fysikaliskt arbete). Observera också att det följer från definitionen att vi kan approximera integraler med Riemannsummor.

Kapitel 5.6. Du ska kunna de grundläggande formlerna för primitiva funktioner på sid 320 (utom de som innehåller $\sec$, $\csc$, $\sinh$ och $\cosh$). Du ska också kunna formeln för variabelsubstitution och använda i den typ av beräkningar som exemplifieras i kapitlet. Formlerna för integration av trigonometriska funktioner på sidorna 323 och 325 är det bättre att lära sig härleda än att memorera.

Kapitel 5.7 handlar om beräkning av areor för områden begränsade av kurvor i planet. Väsentligen är detta repetition av gymnasiekunskaper och tillämpning av tidigare kapitel.

Kapitel 6.1. Du ska kunna formeln för partiell integration och använda den för beräkningar av den typ som exemplifieras i kapitlet. Avsnittet "Reduction Formulas" ingår ej.

Kapitel 6.2. Hela kapitlet ingår i kursen. Det är viktigt att du förstår hur du kan använda de metoder som beskrivs för att bestämma primitiva funktioner till rationella funktioner.

UPPGIFTER TILL WORKSHOP 9

Under workshopen arbetar du med uppgifterna nedan, antingen själv eller i grupp. Om du inte kan lösa en uppgift, fundera på precis vad det är du inte förstår. Är det ett begrepp som är oklart? Är det en metod som du inte kan använda? Gå tillbaka till boken eller anteckningarna och se om du kan hitta svaret där. Om inte, fråga en kamrat eller läraren. Be bara om hjälp med precis det du inte förstår, inte om hela lösningen på uppgiften. Det är du som ska arbeta på workshopen!

Uppgift 1. Vi ska approximera integralen $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ med Riemannsummor.

- (a) Ange en Riemannsumma med två termer som är en undersumma till integralen.
- (b) Ange en Riemannsumma med fyra termer som är en undersumma till integralen.
- (c) Använd svaret i uppgift (b) för att ge ett närmevärde till $\ln 2$. Förklara!

Uppgift 2. Beräkna nedanstående integraler (när ska svaret innehålla en godtycklig konstant och när ska det inte göra det?)

(a) $\int \frac{dx}{1+x^2}$

(d) $\int \frac{dx}{x}$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$

(e) $\int \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) dx$

(c) $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Uppgift 3. Beräkna nedanstående integraler med hjälp av angiven substitution.

(a) $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{1+4x^2}$ (sätt $u = 2x$).

(b) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ (sätt $t = 1+x^2$).

(c) $\int_{-1}^0 x e^{-x^2} dx$ (sätt $t = x^2$).

(d) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ (sätt $t = \ln x$).

(e) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$ (sätt $u = \sin x$).

(f) $\int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt$ (sätt $u = e^t$).

Uppgift 4. Beräkna nedanstående integraler med hjälp av partiell integration.

(a) $\int_0^1 x e^{-x} dx$

(c) $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$

(b) $\int_1^{\sqrt{e}} x \ln x dx$

(d) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$

Uppgift 5. Bevisa att

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx < 1$$

med hjälp av de grundläggande egenskaperna för integraler.

Uppgift 6. Finns det några symmetrier som gör dessa integraler lättare att beräkna? Beräkna dem!

$$(a) \int_{-1}^1 \sin x \, dx \quad (b) \int_{-1}^1 e^{|x|} \, dx \quad (c) \int_{-1}^1 \arctan x \, dx$$

Uppgift 7. Derivera nedanstående uttryck med avseende på x .

$$(a) \int_0^x \sqrt{1+t} \, dt \quad (b) \int_x^0 \sqrt{1+t} \, dt \quad (c) \int_0^{x^2} \sqrt{1+t} \, dt$$

Uppgift 8. Låt $F(x) = \int_0^x \cos(t^2) \, dt$. Beräkna $F(0)$, $F'(0)$ och $F''(x)$ och beräkna sedan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$.

UPPGIFTER TILL WORKSHOP 10

Under workshopen arbetar du med uppgifterna nedan, antingen själv eller i grupp. Om du inte kan lösa en uppgift, fundera på precis vad det är du inte förstår. Är det ett begrepp som är oklart? Är det en metod som du inte kan använda? Gå tillbaka till boken eller anteckningarna och se om du kan hitta svaret där. Om inte, fråga en kamrat eller läraren. Be bara om hjälp med precis det du inte förstår, inte om hela lösningen på uppgiften. Det är du som ska arbeta på workshopen!

Uppgift 9. Beräkna nedanstående integraler med hjälp av partialbråksuppdelning.

$$(a) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 9} \quad (b) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} \quad (c) \int_0^2 \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3} \, dx$$

Uppgift 10. Bestäm alla primitiva funktioner till

$$(a) f(x) = \frac{1 + 4x - x^2}{x^3 + x}.$$

$$(b) g(x) = \frac{4x^2 + x - 2}{x^3 - x^2}.$$

Uppgift 11. Beräkna följande integraler. Du kan behöva kombinera flera metoder.

$$(a) \int_0^1 \arctan x \, dx$$

$$(b) \int_0^{1/2} \arcsin t \, dt$$

$$(c) \int_1^e (\ln u)^2 \, du$$

Uppgift 12. Bevisa följande olikheter med hjälp av de grundläggande egenskaperna för integraler.

$$(a) \int_{-1}^1 e^{-|x|} \, dx < 2$$

$$(b) \int_a^b \sin^2 x \, dx < \int_a^b |\sin x| \, dx \text{ om } a < b.$$

Uppgift 13. Här är en uppgift om Riemannsummor.

$$(a) \text{ Ange en integral som } \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{k}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} \text{ är en Riemannsumma till.}$$

$$(b) \text{ Beräkna (med hjälp av en integral) gränsvärdet } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n}.$$

HEMUPPGIFTER

Uppgift 14. Bestäm med hjälp av variabelsubstitution alla primitiva funktioner till

$$(a) f(x) = \cos^3 x \sin x$$

$$(b) g(x) = e^{\cos x} \sin x$$

$$(c) h(x) = x\sqrt{1+x}$$

Uppgift 15. Bestäm med hjälp av partiell integration alla primitiva funktioner till

(a) $f(x) = x^2 \sin x$

(b) $g(x) = x^n \ln x$

(c) $h(x) = x\sqrt{1+x}$

Uppgift 16. Bestäm med hjälp av partialbråksuppdelning alla primitiva funktioner till

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

(b) $g(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 6}$

Uppgift 17. Beräkna nedanstående integraler.

(a) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$

(b) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

(c) $\int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

(d) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

(e) $\int_0^1 x \arctan x dx$

(f) $\int_1^4 \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

(g) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(h) $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$

(i) $\int_0^{1/2} \arccos x dx$

(j) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5x + 6} dx$

Uppgift 18. Om man i integralen $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$ gör substitutionen $x = 2 \sin t$, vad blir då de nya gränserna?

Uppgift 19. Skriv upp en Riemann-summa med fyra delintervall till integralen $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ och förklara varför summan ger en approximation av $\ln 2$.

Uppgift 20. Bestäm gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(\frac{\pi k}{n})}{n}$.

Uppgift 21. Visa, utan att räkna ut integralerna, att

(a) $\int_{-1}^1 x \cos x dx = 0$

(b) $\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$

(c) $\int_0^1 x \sin x dx \leq \frac{1}{2}$

(d) $\int_{1/4}^{1/2} x \ln x dx < 0$

Uppgift 22. Derivera med hjälp av huvudsatsen nedanstående funktioner f och g med avseende på x . Är derivatorna positiva eller negativa? Är funktionerna f och g växande eller avtagande?

(a) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, x > 0$

(b) $g(x) = \int_{x^2}^0 e^{-t^2} dt, x > 0$

Uppgift 23. Är $(x) = e^{-x^2}$ integrerbar på intervallet $[0, 1]$? Kan du räkna ut integralen $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ med hjälp av primitiv funktion? Kan du approximera integralen med hjälp av en taylorutveckling av integranden så att felet i approximationen blir mindre än $1/10$?

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Om uppgifterna ovan är för svåra kan det vara lämpligt att först lösa några av de enklare uppgifterna från kursboken. Men man behöver nog inte lösa alla de rekommenderade uppgifterna ur boken.

Kapitel 5.1: 1, 3, 7, 9, 17, 33. Kapitel 5.2: 1, 3. Kapitel 5.3: 1, 5, 9, 11, 17. Kapitel 5.4: 1, 3, 23. Kapitel 5.5: 3, 8, 27, 33, 39, 40, 41. Kapitel 5.6: 5, 6, 7, 9, 21, 23, 43. Kapitel 5.7: 11, 17. Kapitel 6.1: 1, 3, 5, 7, 13, 21. Kapitel 6.2: 1, 5, 9, 11, 13, 23.

SVÅRARE UPPGIFTER

Uppgift 24. Beräkna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Uppgift 25. Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$, $x \in (0, 1)$.

Uppgift 26. Beräkna integralen $\int \frac{dt}{\sin t}$ med hjälp av substitutionen $x = \tan(t/2)$. Tips: vid denna substitution gäller sambanden

$$\cos t = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad \sin t = \frac{2x}{1+x^2}, \quad dt = \frac{2dx}{1+x^2}.$$

(Kan du räkna ut denna integral på något annat sätt?)

TENTAMENSPROBLEM

Tentamensproblemen är av varierande svårighetsgrad. Generellt betyder högre nummer på uppgiften svårare problem. De är avsedda att ge en uppfattning om vilken typ av uppgifter som kan förekomma på tentamen. Du hittar tidigare tentamen och lösningar till dem på Canvas.

2016-10-25: 8

2017-01-09: 7

2016-01-11: 4

2016-06-10: 5

2018-10-23: 6

2019-06-07: 5

2020-03-09: 5

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. (a) $\frac{1}{3/2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 7/12$

(b) $\frac{1}{5/4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3/2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{7/4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 533/840 \approx 0.6345$

(c) Eftersom integralen är exakt $\ln 2$ approximerar Riemannsumman i (b) (och i (a)) detta tal. Så $\ln 2 \approx 0.6345$. Felet i approximationen har vi nu inte analyserat så vi vet inte hur bra den är.

2. (a) $\arctan x + C$ där C är en godtycklig konstant.

(b) $2\sqrt{1+x} + C$ där C är en godtycklig konstant.

(c) $\pi/6$ (obs ingen konstant C här!)

(d) $\ln|x| + C$ där C är en godtycklig konstant.

(e) $\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2} + C$ där C är en godtycklig konstant.

3. (a) $\pi/24$

(b) 1

(c) $\frac{1-e}{2e}$

(d) $1/2$

(e) $3/2$

(f) $\frac{\pi}{12}$

4. (a) $1 - \frac{2}{e}$

(b) $\frac{1}{4}$

(c) 1

(d) $\pi - 2$

5. Tips: om en funktion är mindre än en annan i ett helt intervall så är integralen över det intervallet mindre än motsvarande integral för den andra funktionen.

6. (a) 0

(b) $2e - 2$ (integranden är jämn och integralen $= 2 \int_0^1 e^x dx$.)

(c) 0 (integranden är udda och intervallet symmetriskt runt origo.)

7. (a) $\sqrt{1+x}$
- (b) $-\sqrt{1+x}$
- (c) $2x\sqrt{1+x^2}$
8. Vi har $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ och $F''(x) = -2x \sin x^2$ som är begränsat nära origo så det sökta gränsvärdet fås med Taylorutveckling eller l'Hopitals regel till 1.
9. (a) $-\frac{\ln 5}{6}$
- (b) $\ln 3 - \frac{\ln 5}{2}$
- (c) $2 + 5 \ln 3 - \frac{9}{2} \ln 5$ (utför polynomdivision först.)
10. (a) $\ln(x) + 4 \arctan(x) - \ln(x^2 + 1) + C$, C godt konst
- (b) $\ln(x) - \frac{2}{x} + 3 \ln(x-1) + C$, C godt konst
11. (a) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$
- (b) $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$
- (c) $e - 2$
12. Tips: om en funktion är mindre än en annan i ett helt intervall så är integralen över det intervallet mindre än motsvarande integral för den andra funktionen.
13. (a) $\int_0^1 x^3 dx$
- (b) $1/4$
14. (a) $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$, C godt konst
- (b) $-e^{\cos x} + C$, C godt konst
- (c) $\frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C$, C godt konst (kan förenklas)
15. (a) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$, C godt konst
- (b) $\frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$, C godt konst
- (c) $\frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C$, C godt konst (kan förenklas)
16. (a) $\frac{1}{6} \ln |x-3| - \frac{1}{6} \ln |x+3| + C$, C godt konst

(b) $-2 \ln |x + 2| + 3 \ln |x + 3| + C$, C godt konst

17. (a) $\pi/2$

(b) $2 - \frac{5}{e}$

(c) $\ln(\ln x) + C$, C godt konst

(d) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(e) $2 \cos 1 - 2 \cos 2$

(f) $\pi/6$

(g) $\frac{1}{2}(1 + e^{\pi/2})$

(h) $1 + \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{6}$

(i) $1 + \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{6}$

(j) $x - 10 \ln |x + 3| + 5 \ln |x + 2| + C$, C godt konst

18. 0 och $\pi/6$

19. T.ex. (fyra lika stora delintervall med längd $1/4$ och funktionsvärdet tas i högra ändpunkterna):

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

Summan blir $533/840$ vilket är en approximation av integralens värde. Eftersom integralen kan räknas ut exakt till $\ln 2$ så är Riemannsummans värde också en approximation av detta.

20. Gränsvärdet är $2/\pi$. Tips: summan är en Riemannsumma till $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$

21. (a) Integranden är udda och intervallet symmetriskt runt origo.

(b) Integranden är mindre än 1 och integralen av 1 över samma intervall är 1.

(c) Integranden är mindre än x .

(d) Integranden är negativ över hela intervallet.

22. (a) $f'(x) = e^{-x^2}$, $f'(x)$ är positiv och f är strängt växande.

(b) $g'(x) = -e^{-x^4} \cdot 2x$, $g'(x)$ är negativ för $x > 0$ och g är strängt avtagande.

23. I tur och ordning:

Ja (den är ju kontinuerlig)

Nej

Ja (med fjärde gradens taylorpolynom istället för e^{-x^2} blir integralen $23/30$ och integrerar man värsta tänkbara felet över intervallet så ser man att noggrannheten blir den önskade)

24. Gränsvärdet är 1. (Notera att det ej går att beräkna integralen. Använd lämpliga uppskattningar.)

25. $\frac{1}{6}(\ln(x^2 + x + 1) - 2\ln(1 - x) + 2\sqrt{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})) + C$, där C är en godtycklig konstant.

26. $\ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + C$, med C godtycklig konstant. Ja.



Institutionen för Matematik

SF1625

Envariabelanalys

Läsåret 2025-2026

Albin Eriksson Östman

Modul 6: Båglängd och tillämpningar

Denna modul handlar om kurvor i planet och integraltillämpningar. Kurvorna i planet kommer att vara viktiga hjälpmedel i kursen i flervariabelanalys som kommer senare. Tillämpningar är intressanta i sig själva, men är också ett sätt för oss att ytterligare träna integrationsteknikerna.

LÄSANVISNINGAR

Kapitel 6.5. Generaliserade integraler, läs och lär i sin helhet.

Kapitel 7.1-7.3 är viktiga geometriska tillämpningar av integraler. Det är viktigt här att kunna göra denna typ av härledningar av integralformler med hjälp av Riemannsummor och/eller motsvarande resonemang med differentialer på det sätt som demonstreras i dessa kapitel. Observera att båglängden av en funktionsgraf är ett specialfall av längden av en parameterkurva i Kapitel 8.4. Avsnittet "Areas of surfaces of revolution" ingår ej.

Kapitel 8.2. Läs sidorna 473-476 noggrant och lär dig begreppen så att du själv kan lösa uppgifter av samma typ som Exempel 1-7. Läs Exempel 8 och 9 först när du är färdig med modulen i övrigt.

Kapitel 8.4. Du ska kunna beräkna båglängd för en parameterkurva. Rotationsytor genererade av parameterkurvor och avsnittet "Areas Bounded by Parametric Curves" ingår ej.

UPPGIFTER TILL WORKSHOP 11

Under workshopen arbetar du med uppgifterna nedan, antingen själv eller i grupp. Om du inte kan lösa en uppgift, fundera på precis vad det är du inte förstår. Är det ett begrepp som är oklart? Är det en metod som du inte kan använda? Gå tillbaka till boken eller anteckningarna och se om du kan hitta svaret där. Om inte, fråga en kamrat eller läraren. Be bara om hjälp med precis det du inte förstår, inte om hela lösningen på uppgiften. Det är du som ska arbeta på workshopen!

Uppgift 1. Ange på vilket sätt dessa integraler är generaliserade och beräkna dem.

(a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$

(d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

(e) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx.$

(c) $\int_1^{\infty} x e^{-x} dx.$

Uppgift 2. Avgör om nedanstående generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta.

(a) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$

(c) $\int_{10}^{\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} dx$

(b) $\int_1^{\infty} \frac{e^x}{x} dx$

(d) $\int_0^{\infty} x \sin x dx$

Uppgift 3. Avgör om nedanstående generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta.

(a) $\int_1^{\infty} \frac{2 + \sin(x)}{x^2} dx$

(b) $\int_2^{\infty} \frac{x-1}{x^2} dx$

(c) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 - x} dx$

Uppgift 4. Avgör om nedanstående generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta.

(a) $\int_2^{\infty} \frac{x^2 + 1 + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + x^3} dx$

(b) $\int_{30}^{\infty} \frac{x\sqrt{x} + x}{1 - x^3} dx$

(c) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$

Uppgift 5. Avgör om nedanstående generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta.

(a) $\int_1^{\infty} \frac{\sin(1/t)}{t} dt$

(b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t} \ln(t+1)} dt$

Uppgift 6. Avgör om det obegränsade område som ligger mellan kurvorna $y = 1$ och $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3}$, när $0 \leq x < \infty$, har ändlig area.

Uppgift 7. Härled med hjälp av Riemannsummor formlerna för rotationsvolym runt x - resp y -axeln och beräkna sedan den rotationsvolym som genereras när området mellan kurvan $y = x^3$ och x -axeln på intervallet $0 \leq x \leq 1$ roteras ett varv runt

(a) x -axeln.

(b) y -axeln.

Uppgift 8. Härled följande formler med hjälp av rotationsvolymsteknik.

(a) Volymen V av ett klot med radie r ges av $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

(b) Volymen V av en kon med basradie r och höjd h ges av $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

Uppgift 9. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området mellan kurvan $y = \sqrt{1-x}$ och koordinataxlarna roteras ett varv runt

(a) x -axeln.

(b) y -axeln.

UPPGIFTER TILL WORKSHOP 12

Under workshopen arbetar du med uppgifterna nedan, antingen själv eller i grupp. Om du inte kan lösa en uppgift, fundera på precis vad det är du inte förstår. Är det ett begrepp som är oklart? Är det en metod som du inte kan använda? Gå tillbaka till boken eller anteckningarna och se om du kan hitta svaret där. Om inte, fråga en kamrat eller läraren. Be bara om hjälp med precis det du inte förstår, inte om hela lösningen på uppgiften. Det är du som ska arbeta på workshopen!

Uppgift 10. Ange en ekvation för en ellips runt origo med halvaxlar 3 och 4. Finns det mer än ett alternativ?

Uppgift 11. Rita dessa kurvor.

(a) $x^2 + 2y^2 = 4$.

(b) $x^2 + 2y^2 - 4y = 2$.

(c) $x + y^2 = 1$.

(d) $x^2 = 1 + y^2$.

Uppgift 12. Parametrisera dessa kurvor.

(a) $x^2 + y^2 = 2$.

(b) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.

(c) $y^2 = x + 1$.

Uppgift 13. Beräkna längden av kurvan $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leq x \leq 1/2$.

Uppgift 14 (Kursboken 7.3: 1, 3 och 8.4: 1, 5). Rita kurvorna, och bestäm deras båglängder.

(a) $y = 2x - 1, (1 \leq x \leq 3)$.

(b) $3y = 2x^{3/2}, (0 \leq x \leq 8)$.

(c) $x = 3t^2, y = 2t^3, (0 \leq t \leq 1)$.

(d) $x = t^2 \sin t, y = t^2 \cos t, (0 \leq t \leq 2\pi)$.

Uppgift 15. Betrakta integralen $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$.

(a) är e^{-x^2} integrerbar på intervallet $[0, 1]$? Varför?

(b) Kan du beräkna I exakt med hjälp av primitiv funktion?

(c) Kan du approximera I ? Gör det!

Uppgift 16. En cylindrisk silo med radie 2 meter och höjd 6 meter är fullpackad. Densiteten ρ av innehållet varierar med höjden h enligt formeln

$$\rho(h) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{2}}} \text{ ton/m}^3.$$

Beräkna massan av innehållet i silon.

Uppgift 17. Ett fordon startar från stillastående och kör 30 minuter rakt framåt med accelerationen $2 + 60t$ km/h². Vad är fordonets hastighet efter 30 minuter? Hur långt hinner fordonet?

Uppgift 18. För en viss fjäder gäller att kraften som krävs för att trycka ihop fjädern x meter är $F(x) = x/2$ N. Hur stort arbete krävs för att trycka ihop denna fjäder 1/10 meter?

HEMUPPGIFTER

Uppgift 19. Ange på vilket sätt nedanstående integraler är generaliserade och beräkna dem.

(a) $\int_0^\infty \frac{1}{e^x} dx$

(b) $\int_0^{49} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(c) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

(d) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + x} dx$

(e) $\int_1^\infty xe^{-x^2} dx$

Uppgift 20. Avgör om nedanstående generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta.

(a) $\int_1^\infty \frac{x}{e^{2x}} dx$

$$(b) \int_{49}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x} + 1} dx$$

$$(c) \int_1^{\infty} \cos \frac{1}{x} dx$$

$$(d) \int_1^{\infty} \frac{x^2 - \ln x}{x^3\sqrt{x} + \ln x} dx$$

$$(e) \int_1^{\infty} \frac{1}{\arctan x} dx$$

$$(f) \int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$$

$$(g) \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$

Uppgift 21. Bestäm arean mellan x -axeln och kurvan $y = \frac{1}{4-x^2}$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$.

Uppgift 22. Beräkna volymen av den rotations kropp som uppstår då området mellan x -axeln och kurvan $y = \frac{1}{x+1}$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ roterar ett varv

(a) runt x -axeln

(b) runt y -axeln.

Uppgift 23. En 20 meter hög cylindrisk silo med radie 10 meter är packad med ett material som på höjden h meter över bottenplattan har en densitet som är $\rho(h) = \frac{1}{1+h}$ ton per kubikmeter. Hur mycket väger innehållet i silon.

Uppgift 24. Beräkna längden av kurvan $y = \cosh x$, $0 \leq x \leq 1$. Per definition är $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Funktionen kallas cosinus hyperbolicus.

Uppgift 25. Beräkna längden av kurvan med parametrisering $x = t$, $y = \ln(1 - t^2)$, då t genomlöper intervallet från 0 till $1/2$.

Uppgift 26. Parametrisera dessa kurvor:

- (a) Cirkeln $x^2 + y^2 = 4$
- (b) Cirkeln med medelpunkt i $(1, 2)$ och radie 3
- (c) Kurvan med ekvation $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$
- (d) Kurvan med ekvation $y = x^3, 0 \leq x \leq 2$
- (e) Ellipsen $x^2 + 2y^2 = 1$

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Om uppgifterna ovan är för svåra kan det vara lämpligt att först lösa några av de enklare uppgifterna från kursboken. Men man behöver nog inte lösa alla de rekommenderade uppgifterna ur boken.

Kapitel 6.3: 1, 3, 9. Kapitel 6.5: 1, 3, 5, 15, 23, 33, 34, 35. Kapitel 7.1: 1, 3, 5, 13, 19, 21. Kapitel 7.2: 1, 3. Kapitel 7.3: 3, 11, 21. Kapitel 7.4: 1, 3, 5. Kapitel 7.6: 1, 7. Kapitel 7.7: 1, 5.

SVÅRARE UPPGIFTER

TENTAMENSPROBLEM

Tentamensproblemen är av varierande svårighetsgrad. Generellt betyder högre nummer på uppgiften svårare problem. De är avsedda att ge en uppfattning om vilken typ av uppgifter som kan förekomma på tentamen. Du hittar tidigare tentamen och lösningar till dem på Canvas.

2017-03-17: 8

2018-01-08: 5

2016-06-10: 9

2016-10-25: 6

2017-03-17: 9

2018-06-08: 7

2019-01-07: 7

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. (a) Obegränsat intervall. $\pi/2$.
(b) Integranden obegränsad när $x \rightarrow 1$. $\pi/2$.
(c) Obegränsat intervall. $2/e$.
(d) Integranden obegränsad när $x \rightarrow 1$. 2.
(e) Obegränsat intervall. 2.
2. (a) Konvergent.
(b) Divergent.
(c) Divergent.
(d) Divergent.
3. (a) Konvergent.
(b) Divergent.
(c) Konvergent.
4. (a) Divergent.
(b) Konvergent.
(c) Divergent.
5. (a) Konvergent. Tips: $\sin(x) \leq x$ för alla $x \geq 0$.
(b) Divergent. Tips: $\ln(x) \leq x - 1$ för alla $x > 0$.
6. Areal är $\frac{\ln 3}{2}$.
7. (a) $\pi/7$
(b) $\pi/7$
8. (a) Tips: Klotet är den rotations kropp som genereras när $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ på intervallet $-r \leq x \leq r$ roteras runt x -axeln.
8. Tips: Konen är den rotations kropp som genereras när $y = rx/h$ på intervallet $0 \leq x \leq h$ roteras runt x -axeln.
9. (a) $\pi/2$
(b) $8\pi/15$

10. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ (Det finns fler alternativ.)
11. (a) Det är en ellips.
(b) Det är samma ellips som i (a), men med centrum i (0,1).
(c) Det är en parabel.
(d) Det är en hyperbel.
12. (a) T. ex. $x = \sqrt{2} \cos t$, $y = \sqrt{2} \sin t$, $t \in \mathbb{R}$.
(b) T. ex. $x = 1 + 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$.
(c) T. ex. $x = t^2 - 1$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$.
13. $\ln 3 - \frac{1}{2}$
14. (a) $2\sqrt{5}$
(b) $52/3$
(c) $4\sqrt{2} - 2$
(d) $\frac{8}{3}((1 + \pi^2)^{3/2} - 1)$.
15. (a) Ja! Funktionen är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet. Därför är den integrerbar.
(b) Nej! Det går inte att skriva upp en primitiv funktion med hjälp av elementära uttryck.
(c) Det finns flera sätt. Ett sätt är med hjälp av Riemannsummor (eller trapetsregeln om man känner till den). Ett annat sätt är att Taylorutveckla. Om man Taylorutvecklar integranden upp till grad 4 så får man att
- $$I \approx \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx = 23/30 \approx 0.77. \text{ Felet i denna approximation är mindre än } 1/42.$$
16. 16π ton.
17. Sluthastigheten är 8.5 km/h och fordonet hinner 1.5 km.
18. var: $1/400$ Nm. Lösning: Arbete är kraft gånger väg, om kraften är konstant och i vägens riktning. Problemet här är att kraften inte är konstant. Då får man göra så här: Dela in intervallet från 0 till $1/10$ i många små delintervall. På ett litet sådant delintervall av längd Δx vid en punkt x är kraften ungefär konstant (om delintervallet är litet så hinner inte kraften ändra sig så mycket under det lilla intervallet eftersom kraften varierar kontinuerligt). Arbetet för att göra den lilla längdändringen Δx vid punkten x blir därför ungefär $F(x)\Delta x$.

Arbetet för att göra hela längdändringen blir summan av arbetena på alla dessa små delintervall, vilket är en Riemannsumma som när delintervallens längd går mot 0 konvergerar mot integralen

$$\int_0^{1/10} F(x) dx = \int_0^{1/10} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{400} \text{ Nm}$$

som alltså är det arbete som krävs för att längdändra fjädern 0.1 meter.

Ibland skriver man i tillämpningar ovanstående resonemang betydligt mer kortfattat ungefär så här:

Arbetet för att göra en liten längdändring dx vid punkten x är $F(x) dx$. Hela arbetet fås genom summation till

$$\int_0^{1/10} F(x) dx = \int_0^{1/10} \frac{x}{2} dx = \frac{1}{400} \text{ Nm}$$

som alltså är det arbete som krävs för att längdändra fjädern 0.1 meter.

19. (a) 1

(b) 14

(c) 2

(d) $\ln 2$

(e) $1/2e$

20. (a) Konvergent (integranden är mindre än e^{-x} , integralen kan också räknas ut med partiell integration)

(b) Konvergent (integranden är mindre än $1/x\sqrt{x}$)

(c) Divergent (integranden är större än $1/2$)

(d) Konvergent (samma uppskattning som i uppgift B gäller)

(e) Divergent (integranden är större än $2/\pi$)

(f) Divergent (integranden är större än x)

(g) Divergent (primitiv funktion är $\ln(\ln x)$)

21. $\frac{1}{4} \ln 3$

22. (a) $\pi/2$

(b) $2\pi(1 - \ln 2)$

23. $100\pi \ln 21$ ton

24. $\frac{1}{2}(e - \frac{1}{e})$

25. $\ln 3 - \frac{1}{2}$

26. (a) $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, t \in [0, 2\pi]$

(b) $x = 1 + 3 \cos t, y = 2 + 3 \sin t, t \in [0, 2\pi)$

(c) Samma kurva som i uppgift (b) och samma svar!

(d) $x = t, y = t^3, 0 \leq t \leq 2$

(e) $x = \cos t, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, t \in [0, 2\pi)$



Modul 7: Serier

Denna modul handlar om talföljder och serier. Två viktiga begrepp som man måste ha koll på är **konvergens** och **divergens**. Det är också viktigt att lära sig hur man kan avgöra om en serie är konvergent eller divergent. Vi har vissa verktyg tillgängliga för att kunna avgöra hurvida en serie är konvergent eller divergent. Dessa är integraltestet, jämförelsestestet, kvottestet, och rotestet. Att kunna använda dessa tester är ett centralt tema för denna modul.

LÄSANVISNINGAR

Kapitel 9.1 handlar om talföljder, ett begrepp vi behöver för att kunna prata ordentligt om serier. Hela kapitlet ingår.

Kapitel 9.2-9.3: Här definieras vad en serie är, vad vi menar med att den konvergerar respektive divergerar, och hur man kan avgöra om så kallade positiva serier konvergerar. Kapitlet ingår i sin helhet i kursen.

Kapitel 9.5: Från detta avsnitt ingår endast definitionen av en potensserie.

Kapitel 9.6: I detta avsnitt behandlas Taylorserier. Det räcker att känna till definitionen av en Taylorserie.

Angående potensserier och Taylorserier ska man också känna till att serier där termerna innehåller en variabel x kan konvergera för vissa x men divergera för andra, samt att använda metoderna från Kapitel 9.3 för att avgöra för vilka x sådana serier konvergerar. Djupare teori om potensserier ingår inte i denna kurs.

UPPGIFTER TILL WORKSHOP 13

Under workshopen arbetar du med uppgifterna nedan, antingen själv eller i grupp. Om du inte kan lösa en uppgift, fundera på precis vad det är du inte förstår. Är det ett begrepp som är oklart? Är det en metod som du inte kan använda? Gå tillbaka till boken eller anteckningarna och se om du kan hitta svaret där. Om inte, fråga en kamrat eller läraren. Be bara om hjälp med precis det du inte förstår, inte om hela lösningen på uppgiften. Det är du som ska arbeta på workshopen!

Uppgift 1. Avgör om nedanstående serier är konvergenta eller divergenta. Tips: går termerna mot 0?

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\arctan k}$

Uppgift 2. Avgör om nedanstående serier är konvergenta eller divergenta. Kan du beräkna dem?

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

(b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

(c) $\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j}$

Uppgift 3. Någon påstår att serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

är konvergent eftersom termerna går mot noll. Har denna någon rätt?

Uppgift 4. Avgör om nedanstående serier är konvergenta eller divergenta, genom att jämföra med lämplig serie eller med en integral. Du behöver inte beräkna dem.

(a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{10}{k\sqrt{k}}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^k}$

(c) $\sum_{j=4}^{\infty} \frac{1+j+\ln j}{j^2-1}$

Uppgift 5. Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent, dvs partialsummorna $s_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ konvergerar mot ett tal s . Hur många termer ska man ta med i en partialsumma för att approximera serien med ett fel som är mindre än 0.01?

Uppgift 6. Avgör om $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ är konvergent eller divergent, genom att jämföra med en lämplig integral.

Uppgift 7 (Kursboken 9.3: 1, 3, 7, 11, 19, 23). Avgör om serierna är divergenta eller konvergenta. Använd lämpligt test.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)^3}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)}{n^2 e^n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^{4/3}}{2 + n^{5/3}}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^3}$$

Uppgift 8. Visa att

$$\frac{1}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < \frac{\pi + 1}{2}.$$

Uppgift 9. Bestäm Maclaurin-serierna till

$$(a) \sin x$$

$$(b) \cos(2x)$$

$$(c) e^x$$

$$(d) e^{x^2}$$

Uppgift 10. Avgör för vilka $x \geq 0$ nedanstående potensserier konvergerar.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

HEMUPPGIFTER

Observera att denna modul innehåller repetition, så uppgifterna nedan kommer från hela kursen. De är på tentanivå. Några av dem är också riktigt svåra!

Uppgift 11. Avgör om dessa serier är konvergenta eller divergenta.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\arctan n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - \ln n}{n + e^n}$$

Uppgift 12. Beräkna integralen $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$.

Uppgift 13. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = \ln(1 + x^2) - 2 \arctan x$.

Uppgift 14. Beräkna de geometriska serierna nedan.

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$$

Uppgift 15. Bestäm alla lokala extrempunkter/extremvärden till funktionen $f(x) = \frac{1+x}{e^x}$. Har funktionen något största eller minsta värde?

Uppgift 16. Visa med hjälp av Cauchys integralkriterium att

$$\frac{\pi}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n)\sqrt{n}} \leq \frac{\pi+1}{2}$$

Uppgift 17. Visa att $x - \ln(1+x) \geq 0$ för alla $x \geq 0$.

Uppgift 18. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området mellan x -axeln och kurvan $y = e^{-x}$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ roterar ett varv

(a) runt x -axeln.

(b) runt y -axeln.

Uppgift 19. Låt funktionen f vara definierad genom

$$f(x) = \frac{e^x}{x^e}, \quad e \leq x \leq \pi.$$

Bestäm största och minsta värdet av f och svara sedan på frågan: vilket är störst, e^π eller π^e ?

Uppgift 20. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y''(t) + y'(t) = 0$ som är begränsade.

Uppgift 21. Bestäm längden av kurvan med parametrisering $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

Uppgift 22. Låt funktionen f vara definierad för alla reella tal x genom

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

- (a) I vilka punkter x är f kontinuerlig?
- (b) I vilka punkter x är f deriverbar?
- (c) Antar f ett största och ett minsta värde? Bestäm dessa i så fall.

Uppgift 23. Beräkna nedanstående integraler.

(a) $\int_0^1 \arcsin t \, dt$

(b) $\int_0^{\pi/2} t^2 \sin t \, dt$

Uppgift 24. Låt $f(x) = e^x \sin x$ och gör följande.

- (a) Ta fram Taylorpolynomet $p(x)$ av grad 2 kring $x = 0$.
- (b) Skriv upp resttermen, dvs ett uttryck för $f(x) - p(x)$.
- (c) Använd ovanstående för att beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2}$.

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Om uppgifterna ovan är för svåra kan det vara lämpligt att först lösa några av de enklare uppgifterna från kursboken som listas ovan. Men man behöver nog inte lösa alla de rekommenderade uppgifterna ur boken.

Kapitel 8.1: 1, 3, 5. Kapitel 8.2: 1, 7. Kapitel 8.5: 9, 13. Kapitel 9.1: 1, 3, 17. Kapitel 9.2: 1, 5. Kapitel 9.3: 1, 3, 27, 29, 35.

SVÅRARE UPPGIFTER

TENTAMENSPROBLEM

Tentamensproblemen är av varierande svårighetsgrad. Generellt betyder högre nummer på uppgiften svårare problem. De är avsedda att ge en uppfattning om vilken typ av uppgifter som kan förekomma på tentamen. Du hittar tidigare tentamen och lösningar till dem på Canvas.

2017-03-17: 9

2018-06-08: 7

2019-01-07: 7

2016-01-11: 9

2017-01-09: 9

2018-10-23: 5

2020-06-03: 6

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. (a) Divergent
- (b) Divergent
2. (a) 2
- (b) $1/2$, tips: bryt ut $1/2^2$ och använd formeln för geometrisk summa på det som är kvar.
- (c) $\frac{1}{e-1}$, tips: $e^{-j} = (1/e)^j$.
3. Nej, serien är divergent (det är den harmoniska serien). Att termerna i en serie går mot noll är inte ett tillräckligt villkor för att serien ska vara konvergent.
4. (a) Konvergent
- (b) Konvergent
- (c) Divergent
5. 100. Tips: jämför $s - s_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ med en integral.
6. Divergent
7. (a) Konvergent
- (b) Divergent
- (c) Divergent
- (d) Divergent
- (e) Divergent
- (f) Konvergent
8. Den första olikheten följer av att den första termen i serien är $1/2$. För den andra olikheten, skriv serien som $1/2 + \sum_n = 2^\infty \dots$ och uppskatta summan med hjälp av integralen $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} dx$.
9. (a) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- (b) $1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2n!}$.
- (c) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- (d) $1 + x^2 + \frac{x^6}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$.
10. (a) Konvergent för $x \in [0, 2)$.

(b) Konvergent för $x \in [0, 1]$.

11. (a) Konvergent

(b) Konvergent

(c) Divergent

(d) Divergent

(e) Konvergent

12. $\pi/4$ (använd en trig formel)

13. $[\ln 2 - \frac{\pi}{2}, \infty)$ (gör en derivataundersökning och kolla gränsvärdena i $\pm\infty$)

14. (a) $\frac{1}{1-\frac{1}{e}}$

(b) 1

15. Lokal maxpunkt i $x = 0$ där funktionen har värdet 1 som också är funktionens största värde. Minsta värde saknas.

16. -

17. Gör en derivataundersökning av $f(x) = x - \ln(x + 1)$, $x \geq 0$.

18. (a) $\pi(\frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2})$

(b) $2\pi(1 - \frac{2}{e})$

19. $e^\pi > \pi^e$

20. $y(t) = C$, där C är en godtycklig konstant, är alla begränsade lösningar till diffekvationen.

21. $3/2$

22. (a) Alla x

(b) Alla x (använd derivatans definition i origo, annars deriveringsregler)

(c) Minsta värdet är 0, största värde saknas

23. (a) $\pi/2 - 1$

(b) $\pi - 2$

24. (a) $p(x) = x + x^2$

(b) $2e^c(\cos c - \sin c)x^3/3!$ för något c mellan 0 och x

(c) 1