

SF1625, lösningsförslag till extra utmanande seminarieuppgifter

Allmänna kommentarer om lösningsförslagen

För det första: dessa uppgifter är långt över vad som krävs för att få A på tentan i SF1625. Varje deluppgift är över A-nivå.

Dessa lösningar kan vid första anblick verka långrandiga, med många upprepade formuleringar om antaganden och kvantifieringar i stil med "för alla A som uppfyller B ". Anledningen är att det är avgörande att göra precisa påståenden och kvantifiera korrekt för att skriva giltiga matematiska bevis. Med tiden utvecklar man en intuition för logiken bakom sådana resonemang, och då kan man argumentera korrekt utan att alltid skriva ut alla detaljer. Men för att nå dit måste man först bygga upp en stabil förståelse för logiken i bevisen; först då kan man tryggt utelämna detaljer utan att riskera felaktiga argument. Man också fler verktyg för att bedöma rimligheten hos delar av resonemang och kunna avgränsa just det som är kritiskt i situationen. Begreppet *utan inskränkning* (eng. *without loss of generality*, *WLOG*) är till exempel väldigt vanligt bland matematiker, och handlar om att göra sig av med detaljer som är mindre viktiga än andra på ett sätt som ändå är logiskt korrekt.

Extra utmanande uppgift från seminarium 3

Låt $I \subseteq \mathbb{R}$ vara¹ ett intervall. En funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sägs vara *glatt* om den i varje punkt kan deriveras hur många gånger som helst. Vi säger att f är *Lipschitzkontinuerlig* om det finns en konstant K sådan att $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ för alla $x, y \in I$.

- (a) Är alla glatta funktioner $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitzkontinuerliga? Är alla Lipschitzkontinuerliga funktioner $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ glatta? Blir svaren annorlunda om vi antar att I är ett slutet och begränsat intervall? Bevisa eller ge motexempel för varje påstående.
- (b) *Regularitet*: Antag att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är glatt, och antag att $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ är en funktion definierad på ett öppet intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, som uppfyller $y(x_0) = y_0$, för något $x_0 \in I$ och något $y_0 \in \mathbb{R}$, och $y'(x) = f(y(x))$ för alla $x \in I$. Visa att y är glatt.

Följande sats kan vara användbar för att lösa de återstående uppgifterna:

¹Notera att I även kan vara hela $\mathbb{R}$, eller vara obegränsat i en riktning.

Sats 1. Antag att $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, och att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en Lipschitzkontinuerlig funktion. Då finns ett $\epsilon > 0$ och en funktion $y : (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller $y(x_0) = y_0$ och $y'(x) = f(y(x))$ för alla $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, och som är den unika funktionen som uppfyller dessa villkor. Med andra ord, om $\tilde{y} : (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ är en annan funktion som uppfyller $\tilde{y}(x_0) = y_0$ och $\tilde{y}'(x) = f(\tilde{y}(x))$ för alla $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, så är $y = \tilde{y}$.

Satsen är ett specialfall av *Picard–Lindelöfs sats*, och ni får använda satsen utan² bevis.

- (c) *Global entydighet*: Antag att f och y uppfyller villkoren i deluppgift (b), men antag också att f är Lipschitzkontinuerlig. Visa att y är den *unika* funktionen på intervallet I som uppfyller dessa villkor. Med andra ord, visa att om $\tilde{y} : I \rightarrow \mathbb{R}$ är en annan funktion som uppfyller $\tilde{y}(x_0) = y_0$ och $\tilde{y}'(x) = f(\tilde{y}(x))$ för alla $x \in I$, så är $y = \tilde{y}$.
- (d) *Global existens*: Antag att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är glatt, Lipschitzkontinuerlig och begränsad, och att $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Visa att det existerar en funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definierad på hela $\mathbb{R}$, sådan att $y(x_0) = y_0$ och $y'(x) = f(y(x))$ för alla $x \in \mathbb{R}$.
- (e) Visa att resultatet från deluppgift (d) gäller även utan antagandet om att f är Lipschitzkontinuerlig.
- (f) Visa att resultatet från deluppgift (d) gäller även utan antagandet om att f är begränsad (men fortfarande med antagandet om att f är Lipschitzkontinuerlig).
- (g) Visa att resultatet från deluppgift (d) inte gäller om båda dessa antaganden tas bort. Med andra ord, ge ett exempel på en glatt funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (som enligt deluppgift (e) och (f) varken kan vara Lipschitzkontinuerlig eller begränsad), tillsammans med konstanter $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, sådana att det inte existerar någon funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller $y(x_0) = y_0$ och $y'(x) = f(y(x))$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Lösning

- (a) Funktionen $f(x) = |x|$, definierad för alla $x \in \mathbb{R}$, är inte glatt, men den är Lipschitzkontinuerlig, eftersom det för alla $x, y \in \mathbb{R}$ gäller

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

där olikheten är en direkt konsekvens av triangelolikheten.

Funktionen $g(x) = x^2$, där $x \in \mathbb{R}$, är glatt. Den är däremot inte Lipschitzkontinuerlig, enligt följande resonemang. För alla $x, y \in \mathbb{R}$ gäller $|g(x) - g(y)| = |x + y||x - y|$, och om g hade varit Lipschitzkontinuerlig hade det funnits en konstant K sådan att $|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$. Detta hade då även gällt för alla konstanter som är större än K , så vi kan utan inskränkning anta att $K > 1$ (välj ett större K om detta inte skulle vara fallet). Om vi låter $x = K$ och $y = 1$, hade det då gällt att $|g(x) - g(y)| = |K + 1||x - y| = (K + 1)|x - y|$. Eftersom $K > 1$, så är $x \neq y$, och alltså hade det gällt att $|g(x) - g(y)| > K|x - y|$, vilket hade varit en motsägelse mot antagandet att g är Lipschitzkontinuerlig.

Den tidigare nämnda funktionen f är fortfarande Lipschitzkontinuerlig och ickeglatt om man begränsar definitionsmängden till $[-1, 1]$. Tillsammans visar detta att Lipschitzkontinuerliga funktioner inte behöver vara glatta, oavsett om definitionsmängden är ett slutet

²Beviset kräver verktyg ni inte kommer lära er i denna kurs, såsom teori för metriska rum, speciellt *Banachs fixpunktsats* (för bakgrund till detta, se exempelvis boken *Principles of Mathematical Analysis* av Walter Rudin, som används i kursen *SF1677 Analysens grunder*). Det kräver även viss teori om integraler, som ni inte har gått igenom i kursen ännu.

och begränsat intervall eller inte, och att glatta funktioner inte behöver vara Lipschitzkontinuerliga när definitionsmängden är ett intervall som inte är slutet och begränsat.

Däremot är alla glatta funktioner på ett slutet och begränsat intervall Lipschitzkontinuerliga. Om $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ är en glatt funktion på ett slutet och begränsat intervall är funktionen $|h'|$ kontinuerlig och antar ett maximum K på intervallet. Låt $x, y \in I$ vara godtyckliga; då säger medelvärdessatsen att det finns ett c mellan x och y sådant att $(x - y)f'(c) = (f(x) - f(y))$. Det betyder att $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq K|x - y|$.

- (b) Det går att visa med induktion att om y är C^k och f är glatt, så är $f \circ y$ också C^k . Eftersom y är deriverbar är y kontinuerlig, dvs. y är C^0 . Antag nu att y är C^k för något $k \geq 0$, och att $y' = f \circ y$. Då är y' också C^k , så att y är C^{k+1} .

Med induktion fås att y är C^k för alla naturliga tal k , vilket är ekvivalent med att säga att y är glatt.

- (c) Antag motsatsen, alltså att $y(x_1) \neq \tilde{y}(x_1)$ för något $x_1 \in I$. Låt oss först hantera fallet där $x_1 \geq x_0$. Om vi låter $A \subseteq I$ vara mängden av tal $x \geq x_0$ sådana att $y(t) = \tilde{y}(t)$ för alla $t \in [x_0, x]$, innebär detta att $x_1 \notin A$, och det innebär även att $x \notin A$ för alla $x > x_1$. Speciellt är x_1 en övre gräns för A . Enligt supremumaxiomet för de reella talen finns det ett supremum (minsta övre gräns) $x_2 \in \mathbb{R}$ till A , det vill säga en övre gräns till A som är mindre än eller lika med alla andra övre gränser till A .

Notera nu att $x_2 - 1/n$ inte är en övre gräns till A när n är ett positivt heltal (enligt definitionen av supremum). Därför finns det något $x > x_2 - 1/n$ som tillhör A (annars hade $x_2 - 1/n$ varit en övre gräns till A). Eftersom x tillhör A innebär det att y och $\tilde{y}$ är identiskt lika på intervallet $[x_0, x]$, så bland annat innebär det att de är identiskt lika på intervallet $[x_0, x_2 - 1/n]$. Men alla punkter x som uppfyller $x_0 \leq x < x_2$ är mindre än $x_2 - 1/n$ för *något* n , så det innebär att $y(x) = \tilde{y}(x)$ för *alla* x med $x_0 \leq x < x_2$. Om x_2 är den högra ändpunkten för I betyder det här förstås att det inte kan finnas något $x \in I$ med $x \geq 0$ där $y(x_0) = \tilde{y}(x_0)$, vilket är en motsägelse. Låt oss därför anta att x_2 inte är den högra ändpunkten för I , i vilket fall $x_2 \in I$. Då är även

$$y(x_2) = \lim_{x \nearrow x_2} y(x) = \lim_{x \nearrow x_2} \tilde{y}(x) = \tilde{y}(x_2),$$

så att $x_2 \in A$.

Låt oss nu definiera $y_2 = y(x_2)$. Enligt Sats 1 vet vi att det finns en omgivning $(x_2 - \epsilon, x_2 + \epsilon) \subseteq I$ till x_2 där y är den unika lösningen till differentialekvationen som uppfyller $y(x_2) = y_2$. Men vi visade nyss att även $\tilde{y}(x_2) = y_2$, och vi vet enligt antagande att $\tilde{y}$ uppfyller differentialekvationen på den omgivningen. Från detta följer det att $\tilde{y}$ måste vara identiskt lika med y på $(x_2 - \epsilon, x_2 + \epsilon)$, och eftersom vi redan vet att y och $\tilde{y}$ är identiskt lika på $[x_0, x_2]$ ger detta att de även är identiskt lika på $[x_0, x_2 + \epsilon)$. Speciellt tillhör $x_2 + \epsilon/2$ mängden A , vilket är en motsägelse, eftersom $x_2 + \epsilon/2 > x_2$ och eftersom x_2 är en övre gräns till A .

Resonemanget där de skiljer sig i någon punkt x_1 till vänster om x_0 (dvs. $x_1 < x_0$) är nästan likadant, förutom att man använder sig av infimumegenskapen, som säger att varje mängd av reella tal som har en undre gräns har ett infimum (en största undre gräns).

- (d) Om y är en lösning på ett öppet intervall I_1 som innehåller x_0 , och $\tilde{y}$ är en lösning på ett öppet intervall I_2 som innehåller x_0 , så kan vi definiera $\hat{y} : I_1 \cup I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ genom att låta

$$\hat{y}(x) = \begin{cases} y(x), & x \in I_1, \\ \tilde{y}(x), & x \in I_2. \end{cases}$$

För punkter x som ligger i båda intervall ger detta två olika definitioner av värdet $\hat{y}$, men från deluppgift (c) vet vi att y och $\hat{y}$, betraktade som lösningar på intervallet $I_1 \cap I_2$, måste vara identiskt lika, så de två olika definitionerna av $\hat{y}(x)$ är i dessa fall lika.

Låt nu I vara unionen av *alla* intervall på vilka lösningar är definierade. Och definiera $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ enligt följande:

För varje $x \in I$ finns något intervall J , som innehåller både x_0 och x , på vilket det finns en lösning $\tilde{y} : J \rightarrow \mathbb{R}$ på differentialekvationen och initialvillkoret; vi definierar $y(x) = \tilde{y}(x)$. Detta är oberoende av vilket intervall J och vilken lösning $\tilde{y}$ som valdes, eftersom att två såna lösningar sammanfaller på ett intervall som också innehåller x_0 och x , och enligt deluppgift (c) därför är identiskt lika där. Eftersom y i en omgivning av varje punkt sammanfaller med någon lösning går det att verifiera att y också uppfyller differentialekvationen (då derivatan i en punkt bara beror på funktionsvärdena i en omgivning av den punkten). Funktionen y uppfyller förstås även initialvillkoret $y(x_0) = y_0$.

Det återstår att visa att I måste vara hela $\mathbb{R}$. Som ett steg i det ska vi visa att y' måste ha konstant tecken, dvs. måste vara antingen positiv, negativ, eller noll överallt.

Antag först att $y'(x_1) = 0$ för något $x_1 \in I$. Isåfall är funktionen $\tilde{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definierad som $\tilde{y}(x) = y(x_1)$ för alla $x \in \mathbb{R}$, en funktion som uppfyller $\tilde{y}(x_1) = y(x_1)$ och $\tilde{y}'(x) = f(\tilde{y}(x))$ för alla $x \in I$. Eftersom y också löser samma initialvärdesproblem, dvs. $y(x_1) = y(x_1)$ och $y'(x) = f(y(x))$ för alla $x \in I$, ger resultatet från deluppgift (c) att $y = \tilde{y}$ på I . Men eftersom y är den lösning på detta initialvärdesproblem med störst definitionsområde måste definitionsområdet till y vara hela $\mathbb{R}$. Vi har därmed bevisat att resultatet gäller i det fall där y' blir 0 i någon punkt, så vi kan i resten av lösningen på denna deluppgift anta att så inte är fallet. Men eftersom y är glatt är y' kontinuerlig, så med detta antagande kan y' inte anta olika tecken, då satsen om mellanliggande värden skulle medföra att y' har ett nollställe.

Alltså måste y vara antingen strängt växande eller strängt avtagande. Låt oss anta att y är strängt växande, då fallet med strängt avtagande hanteras nästan likadant, och låt a och b beteckna gränserna för intervallet I . Vi ska visa att $a = -\infty$ och $b = \infty$, men eftersom resonemanget för a är väldigt likt resonemanget för b , begränsar vi oss till att visa att $b = \infty$.

Antag att så inte är fallet, alltså att $b \in \mathbb{R}$. Eftersom f är begränsad finns ett M sådant att $|f| \leq M$ överallt (notera att vi inte har använt faktumet att f är begränsad innan detta). Om $x \in [x_0, b)$, säger medelvärdessatsen att det finns ett c mellan x_0 och b sådant att $y(x) - y(x_0) = (x - x_0)y'(c)$. Alltså är

$$|y(x) - y(x_0)| = |x - x_0|y'(c) = |x - x_0|f(y(c)) \leq (b - x_0)M,$$

så att $y(x) \leq y(x_0) + (b - x_0)M$, vilket ger att y är begränsad uppåt. Eftersom y är växande och begränsat uppåt, existerar gränsvärdet $L := \lim_{x \nearrow b} y(x)$ och är ett reellt tal. Om vi definierar $\tilde{y} : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ enligt

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} y(x), & x < b, \\ L, & x = b, \end{cases}$$

är alltså $\tilde{y}$ kontinuerlig.

Vi vet att

$$\lim_{x \nearrow b} \tilde{y}'(x) = \lim_{x \nearrow b} y'(x) = \lim_{x \nearrow b} f(y(x)) = f(L).$$

Om x_n är en följd av tal i (a, b) som går mot b , kan vi enligt medelvärdessatsen hitta en följd c_n av tal sådana att $(\tilde{y}(b) - \tilde{y}(x_n))/(b - x_n) = \tilde{y}'(c_n)$, där $x_n < c_n < b$, och eftersom $\tilde{y}'(c_n) \rightarrow f(L)$ (och eftersom x_n var en godtycklig följd av tal i (a, b) som går mot b) följer det att $\lim_{x \nearrow b} (\tilde{y}(b) - \tilde{y}(x))/(b - x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{y}'(c_n) = f(L)$. Med andra ord är $\tilde{y}$ deriverbar på hela $(a, b]$ och uppfyller $\tilde{y}'(x) = f(\tilde{y}(x))$ för alla $x \in (a, b]$. Vi vet också att $\tilde{y}(x_0) = y_0$, så att $\tilde{y}$ uppfyller samma initialvärdesproblem som y , och eftersom y hade det största definitionsintervallet av alla funktioner som uppfyller detta följer det att $b \in I$.

Från Sats 1 följer det nu att det finns en lösning på differentialekvationen på en omgivning $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ av b som har värdet L i punkten b . Denna lösning sammanfaller med y på små omgivningar av $b - \epsilon/2$, och enligt tidigare resonemang innebär det att vi kan lappa ihop den med y för att få en funktion definierad på $I \cup (b, b + \epsilon)$ som löser differentialekvationen. Denna lösning kommer förstas fortfarande att ha värdet y_0 i punkten x_0 , men dess definitionsmängd är större än I . Detta är en motsägelse, eftersom intervallet I var det största en sån funktion kunde ha som definitionsmängd. Därför drar vi slutsatsen att vårt antagande om att $b \in \mathbb{R}$ måste ha varit felaktigt.

- (e) Eftersom f fortfarande antas vara begränsad finns fortfarande en konstant M så att $|f| \leq M$. Låt $a > 0$ vara godtyckligt; då följer det av resultatet i deluppgift (a) att f är Lipschitzkontinuerlig på $[y_0 - aM, y_0 + aM]$, säg, med Lipschitzkonstant $K > 0$. Vi kan då definiera en funktion g enligt

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & y_0 - aM \leq t \leq y_0 + aM, \\ f(y_0 - aM), & t < y_0 - aM, \\ f(y_0 + aM), & t > y_0 + aM. \end{cases}$$

Det är relativt enkelt att visa att g är Lipschitzkontinuerlig på hela $\mathbb{R}$, med Lipschitzkonstant K , och begränsad (dess största och minsta värde på $\mathbb{R}$ är samma som de största och minsta värdena för f på $[y_0 - aM, y_0 + aM]$, som existerar eftersom f är kontinuerlig). Enligt deluppgift (d) finns en funktion $\tilde{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller $\tilde{y}'(x) = g(\tilde{y}(x))$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och $\tilde{y}(x_0) = y_0$. Eftersom $|\tilde{y}'(x)| \leq M$, ger medelvärdessatsen att det för alla $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ gäller $|\tilde{y}(x) - \tilde{y}(x_0)| \leq aM$, eller ekvivalent, $y_0 - aM \leq \tilde{y}(x) \leq y_0 + aM$. Per definition betyder det att $g(\tilde{y}(x)) = f(\tilde{y}(x))$ för alla x , så det gäller också $\tilde{y}'(x) = f(\tilde{y}(x))$. Alltså är $\tilde{y}$ en lösning till initialvärdesproblemet på intervallet $[x_0 - a, x_0 + a]$, och eftersom det finns lösningar på varje sådant intervall (för alla $a > 0$) kan vi lappa ihop alla sådana lösningar som i deluppgift (d) (notera att f är Lipschitzkontinuerlig på varje enskilt intervall $[x_0 - a, x_0 + a]$, och att vi kan använda resultatet från (c) för att argumentera för att hoplappningen blir väldefinierad och glatt) till en lösning på hela $\mathbb{R}$.

- (f) Låt $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ vara en lösning på ett maximalt intervall I . Antag att den högra gränsen b till I är ett reellt tal, så att I är begränsat åt höger. Enligt resonemanget i deluppgift (d) måste y gå mot antingen ∞ eller $-\infty$ när $x \nearrow b$. Vi hanterar bara fallet då $y(x) \rightarrow \infty$, eftersom fallet med $-\infty$ är snarlikt. Eftersom $y(x) \rightarrow \infty$ då $x \nearrow b$, måste y vara positivt för punkter tillräckligt nära b , säg, punkter i intervallet $[x_1, b)$ för något $x_1 \in I$. Låt $K > 0$ vara en Lipschitzkonstant för f ; för alla $x \in [x_1, b)$ gäller då

$$|y'(x) - y'(x_1)| = |f(y(x)) - f(y(x_1))| \leq K|y(x) - y(x_1)|,$$

så att

$$y'(x) \leq K|y(x)| + Ky(x_1) + y'(x_1) = Ky(x) + Ky(x_1) + y'(x_1).$$

Detta betyder att funktionen $g(x) = y(x) + y(x_1) + y'(x_1)/K$ uppfyller $g'(x) \leq Kg(x)$ för alla $x \in [x_1, b)$. Men då är

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{g(x)}{e^{Kx}} \right) = \frac{g'(x) - Kg(x)}{e^{Kx}} \leq 0,$$

vilket innebär att funktionen $g(x)$ är mindre än någon multipel av e^{Kx} på intervallet $[x_1, b)$. Eftersom e^{Kx} går mot $e^{Kb} \in \mathbb{R}$ när $x \nearrow b$ kan g , och därmed y , inte gå mot ∞ när $x \nearrow b$, vilket är en motsägelse.

Alltså måste $b = \infty$. På liknande vis fås att den undre gränsen till I måste vara $-\infty$.

- (g) Låt $f(t) = t^2$, $x_0 = 0$, och $y_0 = 1$. Antag att $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uppfyller $y'(x) = f(y(x))$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och $y(x_0) = y_0$. Eftersom $\tilde{y} : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definierad av $\tilde{y}(x) = 1/(1-x)$ också uppfyller $\tilde{y}(x_0) = y_0$ och $\tilde{y}'(x) = f(\tilde{y}(x))$ för x i sin definitionsmängd måste det enligt deluppgift (c) gälla att $y(x) = 1/(1-x)$ för $x < 1$. Det medför att $\lim_{x \nearrow 1} y(x) = \infty$, vilket är en motsägelse, eftersom att kontinuiteten hos y ger att $\lim_{x \nearrow 1} y(x) = y(1) \in \mathbb{R}$.

Man kan också se detta på ett aningen mer direkt sätt, utan att referera till tidigare uppgifter:

Antag att y uppfyller $y(0) = 1$ och $y'(x) = f(y(x)) = y(x)^2$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Eftersom y är deriverbar är y kontinuerlig, så y är nollskilt i någon omgivning av 0. Låt oss definiera $g(x) = x + 1/y(x) - 1$ för alla x där det är väldefinierat. Då är $g(0) = 0$ och

$$g'(x) = 1 - \frac{y'(x)}{y(x)^2} = 0,$$

så att g är konstant, och därför identiskt noll, på det maximala intervall I runt 0 där y är nollskild. Det innebär att $y(x) = 1/(1-x)$ för alla x i detta intervall, och speciellt måste intervallets högra gräns b vara mindre än 1, eftersom vi annars hade haft $\lim_{x \nearrow 1} y(x) = \infty$, vilket hade motsagt att $\lim_{x \nearrow 1} y(x) = y(1) \in \mathbb{R}$. Men detta medför att

$$y(b) = \lim_{x \nearrow b} y(x) = \lim_{x \nearrow b} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-b} > 0,$$

så kontinuiteten hos y ger att y är positiv i en omgivning av b . Därför är y nollskild på ett intervall som innehåller 0 och är större än I , vilket säger emot definitionen av I .

Extra utmanande uppgift från seminarium 4

En del uppgifter i denna modul går ut på att approximera en funktion $f(x)$ i närheten av en punkt a med ett Taylorpolynom, och många av dessa uppgifter kräver att felet ska vara mindre än ϵ , där $\epsilon > 0$ är ett specifikt tal, givet i uppgiften. För att lösa dessa uppgifter är en allmän metod att prova med ett Taylorpolynom av grad 1 och undersöka om felet blir mindre än ϵ . Om det inte blir det, ökar man successivt graden på Taylorpolynomet och provar igen, tills felet blir mindre än ϵ .

En intressant fråga är huruvida denna metod (i teorin) alltid fungerar, oavsett hur litet $\epsilon > 0$ är. Ett potentiellt problem är förstås om f inte kan deriveras hur många gånger som helst (och därmed inte har Taylorpolynom av godtyckligt hög grad), och därför är det rimligt att anta att f är glatt (som definierades i den förra utmanande uppgiften). Ett annat potentiellt problem är om x inte är tillräckligt nära a för att approximationen ska bli bra, och därför är det rimligt att

begränsa sig till att bara betrakta punkter x inom något avstånd $R > 0$ från a . I denna uppgift kommer vi bland annat undersöka huruvida det finns några hinder utöver dessa.

Låt $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ vara en glatt funktion definierad på ett öppet intervall I . Vi säger att f är *analytisk i a* om proceduren beskriven ovan alltid fungerar, för x nära a . Mer exakt menar vi att f sägs vara analytisk i a om det finns något intervall $(a - R, a + R) \subseteq I$ (där $R > 0$) sådant att det för varje $\epsilon > 0$ finns³ ett n sådant att

$$|f(x) - p_n(x)| < \epsilon \text{ för alla } x \in (a - R, a + R).$$

Med p_n menas här Taylorpolynomet av grad n för f kring a , det vill säga

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

(a) Visa att $f(x) = e^x$ är analytisk i 0.

(b) Visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

inte är analytisk i 0, men är analytisk i alla andra punkter.

Vi säger att f är *analytisk* (utan att specificera någon punkt) om f är analytisk i alla punkter i sin definitionsmängd. Om I och J är öppna intervall som uppfyller $I \subseteq J$, och om $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ är två analytiska funktioner som uppfyller att $f(x) = g(x)$ för alla $x \in I$, sägs g vara en *analytisk fortsättning* av f .

(c) Antag att g_1 och g_2 båda är analytiska fortsättningar till f , där g_1 och g_2 är definierade på J och f är definierad på $I \subseteq J$. Visa att $g_1 = g_2$. Detta resultat beskrivs ofta som att *analytiska fortsättningar är entydiga*.

(d) Förklara varför detta ger ett alternativt bevis av att funktionen från (b) inte är analytisk i 0.

I definitionen av analyticitet nämndes att det behövde finnas något $R > 0$ sådant att resten av påståendet gäller. Det behöver inte betyda att det funkar för vilket $R > 0$ som helst. I de fallen där f är analytisk, och där vilket val av $R > 0$ som helst fungerar, kallas f för en *hel* funktion. En hel funktion är alltså en funktion som kan approximeras väl med Taylorpolynom runt en viss punkt, även när man befinner sig långt från den punkten, så länge man väljer ett Taylorpolynom med tillräckligt hög grad.

(e) Visa att $f(x) = \sin x$ är hel.

(f) Visa att $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ är analytisk, men inte hel.

Lösning

(a) Vi vet att $f^{(n)}(x) = f(x)$ för alla heltal $n \geq 0$. Låt $R = 1$, och antag att $x \in (-1, 1)$. Om p_n är det n :te Maclaurinpolynomet för f säger Taylors sats att det finns ett c mellan 0 och 1 sådant att

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

³Notera att n i regel beror på ϵ , och behöver göras större om ϵ görs mindre.

Eftersom $c < 1$ är $e^c < e$, och eftersom $|x| < 1$ är $|x^{n+1}| < 1$, och alltså är

$$|f(x) - p_n(x)| < \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{e}{n+1}.$$

För ett godtyckligt givet $\epsilon > 0$ kan vi välja n som ett heltal som är större än $\frac{e}{\epsilon} - 1$, så kommer alltså $|f(x) - p_n(x)| < \epsilon$.

- (b) Det går att visa att f är glatt, och att alla derivator av f är noll i punkten 0, så att alla Maclaurinpolynom p_n till f är identiskt noll, så att $|f(x) - p_n(x)| = |f(x)| = f(x)$ för alla n . För varje given radie $R > 0$ finns det punkter inom det avståndet från 0 där f inte är noll, till exempel $x = R/2$, där funktionsvärdet är $f(R/2) = e^{-4/R^2} > 0$. Om vi väljer $\epsilon = e^{-4/R^2}$ kan därmed aldrig skillnaden $|f(x) - p_n(x)|$ göras mindre än ϵ på hela intervallet $(-R, R)$, oavsett hur högt n vi väljer. Alltså är f inte analytisk i $a = 0$.

För $a < 0$ är $f^{(n)}(a) = 0$ för alla n , så alla Taylorpolynom är noll, och om man låter $R = |a|$ och låter p_n beteckna Taylorpolynomet för f runt punkten a , gäller då $|f(x) - p_n(x)| = 0$ för alla n , vilket förstås redan är mindre än alla möjliga givna $\epsilon > 0$, vilket visar att f är analytisk i alla punkter till vänster om 0.

Man kan visa att diverse typer av sammansättningar av analytiska funktioner också är analytiska, precis som med elementära funktioner **källa**. Från deluppgift (a) vet vi att $\exp$ är en analytisk funktion, och det inses också lätt att funktionen $x \mapsto x$ är analytisk (dess Taylorpolynom av grad högre än 1 är samma sak som funktionen). Från detta följer att uttrycket e^{-1/x^2} definierar en analytisk funktion på mängden av punkter där det är definierat. Eftersom analyticitet är ett lokalt villkor (dvs. att om restriktionen av en funktion till en godtycklig öppen delmängd är analytisk, är funktionen också analytiskt, så är funktionen också analytisk) ger detta att f är analytisk på $(0, \infty)$.

- (c) Antag motsatsen, det vill säga att $g_1(x) \neq g_2(x)$ för något $x \in J$. Det kan inte finnas ett minsta x för vilket detta gäller, eftersom g_1 och g_2 isåfall skulle ha samma värde överallt till vänster om detta minsta x , och kontinuiteten skulle då ge att $g_1(x) = g_2(x)$, vilket är en motsägelse. Alltså ger ett resonemang som involverar infimumegenskapen att det finns ett $x_0 \in J$ sådant att g_1 och g_2 överensstämmer vid och till vänster om x_0 , men där varje omgivning av x_0 innehåller punkter på höger sida där g_1 och g_2 har olika värden.

Eftersom g_1 och g_2 är glatta existerar alla deras derivator och överensstämmer med motsvarande vänsterderivator, i punkten x_0 . Då g_1 och g_2 överensstämmer vid och till vänster om x_0 måste deras derivator vid x_0 överensstämma, dvs. $g_1^{(n)}(x_0) = g_2^{(n)}(x_0)$ för alla n . Vi vet att de båda är analytiska i x_0 , och vi kan alltså hitta en⁴ radie $R > 0$ så att båda funktioner kan approximeras godtyckligt väl av sina Taylorpolynom på intervallet $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Låt p_n vara Taylorpolynomet för g_1 vid punkten x_0 , vilket enligt tidigare resonemang är samma som det för g_2 . Om $\epsilon > 0$ och $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ är givna går det att välja n sådant att $|g_1(x) - p_n(x)| < \epsilon$ och $|g_2(x) - p_n(x)| < \epsilon$. Triangelolikheten ger

$$\begin{aligned} |g_1(x) - g_2(x)| &= |(g_1(x) - p_n(x)) + (p_n(x) - g_2(x))| \\ &\leq |g_1(x) - p_n(x)| + |g_2(x) - p_n(x)| \\ &< 2\epsilon. \end{aligned}$$

⁴För g_1 finns det en radie R_1 och för g_2 finns det en radie R_2 , och vi kan välja R som den minsta av dessa radier.

Eftersom detta gäller för *alla* $\epsilon > 0$ drar vi slutsatsen att $|g_1(x) - g_2(x)| = 0$, eller ekvivalent, $g_1(x) = g_2(x)$. Detta gäller på hela intervallet $(x_0 - R, x_0 + R)$, vilket motsäger att det finns punkter godtyckligt nära x_0 där g_1 och g_2 har olika värden. Alltså måste vårt antagande om att g_1 och g_2 skiljer sig i någon punkt vara fel.

- (d) Funktionen f från deluppgift (b) är definierad på hela $\mathbb{R}$ och överensstämmer med den analytiska funktionen $g(x) = 0$ på delintervallet $(-\infty, 0) \subseteq \mathbb{R}$. Om f hade varit analytisk i 0 hade den varit analytisk i alla punkter, och resultatet från deluppgift (c) hade då medfört att f överensstämmer med g på hela $\mathbb{R}$, vilket uppenbarligen inte stämmer.
- (e) Antag att $a \in \mathbb{R}$ och att en godtycklig radie $R > 0$ och ett godtyckligt $\epsilon > 0$ är givna. Om p_n är Taylorpolynomet för f vid punkten a ger Taylors sats att

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

för något c (mellan x och a , men det är irrelevant här). Antag nu att $x \in (a - R, a + R)$, och notera att $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ för alla n , så att $|f(x) - p_n(x)| \leq R^{n+1}/(n+1)!$. Om vi låter m vara ett heltal som är större än både R^2 och R/ϵ , och låter $n = 2m$, är

$$\begin{aligned} |f(x) - p_n(x)| &\leq \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{(R^2)^m \cdot R}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1) \cdot m \cdot (m+1) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)} \\ &< \frac{(R^2)^m \cdot R}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1) \cdot m \cdot m \cdot m \cdot \dots \cdot m \cdot m} \\ &= \frac{R}{m! \cdot m} \cdot \left(\frac{R^2}{m}\right)^m \\ &\leq \frac{R}{m} \cdot \left(\frac{R^2}{m}\right)^m \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Eftersom x var en godtycklig punkt i $(a - R, a + R)$, och eftersom $a \in \mathbb{R}$, $R > 0$ och $\epsilon > 0$ alla var godtyckliga, är f hel.

- (f) Det finns flera olika sätt att hitta Maclaurinpolynomen till f , men ett sätt är följande. Om vi för varje n låter $p_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n (-x^2)^k$, och låter $p_{2n+1} = p_{2n}$, kan vi notera att $f(x) - p_{2n}(x) = \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$, så att $|f(x) - p_{2n}(x)| \leq (x^2)^{n+1}$. Speciellt är $f(x) = p_{2n}(x) + \mathcal{O}(x^{2n+2})$ när $x \rightarrow 0$, och motsvarande sak gäller för polynomen p_{2n+1} , vilket enligt entydigheten för Taylorpolynom betyder att p_m , för varje positivt heltal m , måste vara Taylorpolynomet vid 0 (dvs. Maclaurinpolynomet) för f av grad m . Notera att olikheten $|f(x) - p_{2n}(x)| \leq (x^2)^{n+1}$ visar att f är analytisk, då vi exempelvis kan välja $R = 1/2$, och för givet $\epsilon > 0$ sen kan välja n tillräckligt stort för att garantera att $(1/4)^{n+1}$ blir mindre än ϵ , vilket då kommer gälla för alla $|x| < R$. Detta visar att f är analytisk i punkten 0, bevis för att den är analytisk i alla andra punkter **kommer snart**.

För att se att f inte är hel, notera att $|p_m(2)| > 1$ för alla m , medan $f(2) = \frac{1}{5}$, så att $|f(2) - p_m(2)| > \frac{4}{5}$ för alla m . Detta betyder att resttermen inte kan göras mindre än $4/5$, oavsett hur stort m väljs, och alltså kan funktionsvärdet i punkten 2 inte approximeras godtyckligt väl av Maclaurinpolynomen för f .

Extra utmanande uppgift från seminarium 5

En funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sägs ha *kompakt stöd* om det finns något intervall $[a, b]$ sådant att $f(x) = 0$ för alla x utanför intervallet (detta kallas också för att f är en *kompakt stödd funktion*). Om f är en kontinuerlig funktion med kompakt stöd är det meningsfullt att prata om integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad (1)$$

genom att definiera den som integralen av f över något sådant intervall⁵ $[a, b]$. Alternativt kan man tolka integralen i (1) som en generaliserad integral, vilket ger samma resultat.

- (a) Visa att det existerar en glatt och kompakt stödd funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att $\phi(x) \geq 0$ för alla x , som också uppfyller

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1.$$

En sådan funktion kallas för en *mollifikator*.

- (b) Antag att ϕ är en mollifikator och att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Visa att det för alla $a \in \mathbb{R}$ gäller

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(t(x-a)) dx \right) = f(a).$$

- (c) Antag att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är glatt, och att det för alla glatta, kompakt stödda funktioner g gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g''(x) dx = 0.$$

Visa att f är ett förstgradspolynom.

- (d) Visa att resultatet från deluppgift (c) gäller även om antagandet att f är glatt tas bort, och man istället bara⁶ antar att f är kontinuerlig.

Lösning

- (a) Betrakta funktionen från den utmanande uppgiften för seminarium 4, som ges av

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

I den uppgiften såg vi att alla derivator till f är noll vid $x = 0$, och speciellt är alla derivator till f väldefinierade överallt, så att f är glatt. Det följer att funktionen $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definierad av $\phi(x) = f(x)f(1-x)$ är glatt, och det inses lätt att ϕ har kompakt stöd (den är noll utanför intervallet $[0, 1]$). Eftersom $\phi \geq 0$ överallt, och eftersom $\phi(1/2) = e^{-8} > 0$, följer det att $A := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx > 0$. Genom att ersätta ϕ med funktionen ϕ/A fås nu en funktion med de önskade egenskaperna.

⁵Denna integrals värde är oberoende av vilket sådant intervall man väljer.

⁶Inom den högre matematiken uttrycks dessa antaganden ofta som att f är *svagt harmonisk*, eller att f är en *svag lösning på Laplaces ekvation*. Det resultat som ska visas i uppgiften är ett specialfall av vad som brukar kallas för *elliptisk regularitet*.

- (b) Låt $a \in \mathbb{R}$ och $\epsilon > 0$. Eftersom f är kontinuerlig finns det ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(a)| < \epsilon/2$ gäller för alla x som uppfyller $|x - a| < \delta$. Låt nu $t > 0$ vara så stort att $\phi(t(x - a)) = 0$ för alla x som uppfyller $|x - a| \geq \delta$. Då är

$$\begin{aligned} \left| \left(t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(t(x - a)) dx \right) - f(a) \right| &= \left| t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f(a)) \phi(t(x - a)) dx \right| \\ &\leq t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(a)| \phi(t(x - a)) dx \\ &\leq t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\epsilon/2) \cdot \phi(t(x - a)) dx \\ &= (\epsilon/2) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - a) dx \\ &= \epsilon/2 \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Alltså är avståndet mellan $t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(t(x - a)) dx$ och $f(a)$ mindre än ϵ , givet att t är tillräckligt stort. Då $\epsilon > 0$ var godtyckligt gäller per definition det som skulle visas.

- (c) Antag att g är en kompakt stödd funktion, som är noll utanför intervallet $[a, b]$. För att förenkla resonemanget kan vi välja ett något större intervall så att g också är noll nära a och nära b . Eftersom g är noll nära a och b är också⁷ $g'(a) = g'(b) = 0$. Vi har

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)g(x) dx &= \int_a^b f''(x)g(x) dx \\ &= [f'(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g'(x) dx \\ &= [f'(x)g(x)]_a^b - \left([f(x)g'(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g''(x) dx \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

där vi har använt partiell integration tillsammans med antagandet om f , samt att g och g' är noll i ändpunkterna. Det gäller alltså att $\int_{-\infty}^{\infty} f''(x)g(x) dx = 0$ för *alla* glatta funktioner g med kompakt stöd.

Låt nu ϕ vara en mollifikator, och låt $t > 0$ och $a \in \mathbb{R}$ vara godtyckliga. I detta fall har funktionen $g(x) = \phi(t(x - a))$ kompakt stöd och är glatt, så det följer att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f''(x) \phi(t(x - a)) dx = 0.$$

Å andra sidan går t gånger detta enligt deluppgift (b) mot $f''(a)$ då $t \rightarrow \infty$, så det följer att $f''(a) = 0$, och det gäller för alla $a \in \mathbb{R}$. Alltså är f' identiskt lika med någon konstant C_1 , och därmed är $f(x) = C_1x + C_2$, för någon konstant C_2 .

⁷Detta gällde egentligen också redan från början, utan att behöva förstora intervallet, men det är enklare att resonera om det om man förstörar intervallet för att ta bort alla eventuella tveksamheter. Notera att det inte finns någon nackdel med att göra det enkelt för sig i den här situationen.

- (d) Låt $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vara tal som uppfyller $x_1 < x_2$, och låt $x_3 = (x_1 + x_2)/2$. Vidare, låt $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en mollifikator, antag utan inskränkning att ϕ är jämn (annars, ersätt ϕ med funktionen $(\phi(x) + \phi(-x))/2$), och definiera för varje $t > 0$ en funktion $g_{1,t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genom

$$g_{1,t}(x) = t \cdot \phi(t(x - x_1)) + t \cdot \phi(t(x - x_2)) - 2t \cdot \phi(t(x - x_3)).$$

Då har $g_{1,t}$ kompakt stöd, och uppfyller

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{1,t}(x) dx = 0.$$

Låt nu $g_{2,t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en primitiv funktion till $g_{1,t}$ som uppfyller $g_{2,t}(x) = 0$ när x är tillräckligt nära $-\infty$. Från faktumet att integralen av $g_{1,t}$ är noll fås då att $g_{2,t}(x)$ också är noll för x tillräckligt nära ∞ .

Eftersom funktionen $g_{1,t}(x + x_3)$ är jämn (och har kompakt stöd) följer det från egenskaper hos integraler att funktionen $g_{2,t}(x + x_3)$ är udda. Om vi låter $g_{3,t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara den primitiva funktionen till $g_{2,t}$ som uppfyller $g_{3,t}(x) = 0$ för x nära $-\infty$ följer det därmed bland annat att $g_{3,t}(x) = 0$ även för x nära ∞ . Alltså har $g_{3,t}$ kompakt stöd, och det inses lätt att $g_{3,t}$ är glatt. Enligt antagandet på f gäller nu

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g_{3,t}'(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g_{1,t}(x) dx \\ &= t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(t(x - x_1)) dx + t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(t(x - x_2)) dx \\ &\quad - 2t \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(t(x - x_3)) dx, \end{aligned}$$

och genom att låta $t \rightarrow \infty$ ser vi alltså att $f(x_1) + f(x_2) - 2f(x_3) = 0$.

Sammanfattningsvis har vi alltså visat att för alla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, gäller

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \quad (2)$$

Antag nu utan inskränkning att $f(0) = f(1) = 0$. Genom att tillämpa (2) på fallet $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ får vi att $f(2) = 0$, och genom att tillämpa (2) igen på fallet $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ fås $f(3) = 0$, och så vidare. På samma sätt fås att $f(-1) = f(-2) = f(-3) = \dots = 0$. Genom att tillämpa (2) på exempelvis $x_1 = 0$ och $x_2 = 1$ fås att $f(1/2) = 0$, och genom att tillämpa det igen på $x_1 = 0$ och $x_2 = 1/2$ fås $f(1/4) = 0$, och så vidare. Med induktion fås att f är noll i alla punkter som har ändlig binär utveckling (utveckling i basen två), och eftersom f är kontinuerlig måste f därför vara noll i alla punkter (eftersom varje tal kan approximeras godtyckligt väl av ändliga utvecklingar i basen två), vilket avslutar beviset.

Extra utmanande uppgift från seminarium 6

Antag att vi har en kurva C som beskrivs av två glatta funktioner $x, y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, där kurvans punkter beskrivs av $(x(t), y(t))$, för $0 \leq t \leq 1$. Antag vidare att kurvan C inte passerar genom

origo (det vill säga att $x(t) = y(t) = 0$ inte gäller för något t). Vi definierar *omloppstalet* för C enligt

$$\text{omlopp}(C) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} dt.$$

- (a) Visa att det finns en glatt funktion $r : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ och en glatt funktion $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sådana att $x(t) = r(t) \cos(\theta(t))$ och $y(t) = r(t) \sin(\theta(t))$ för alla $t \in [0, 1]$.
- (b) Under antagandet att kurvan C är sluten, det vill säga att $x(0) = x(1)$ och $y(0) = y(1)$, visa att $\text{omlopp}(C)$ alltid är ett heltal.

Antag att det för varje $t \in [0, 1]$ existerar en kurva C_t som inte passerar genom origo, beskriven av två glatta funktioner $x_t, y_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, och antag att det för varje $t \in [0, 1]$ gäller att $x_0(0) = x_t(0) = x_t(1)$ och $y_0(0) = y_t(0) = y_t(1)$. Antag vidare att det för **alla** val av glatta funktioner $u, v : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gäller att funktionerna $f(t) = x_{u(t)}(v(t))$ och $g(t) = y_{u(t)}(v(t))$ är glatta. I detta fall sägs C_0 vara *gånghomotop* till C_1 och vice versa; C_0 och C_1 sägs vara *gånghomotopa* (till varandra).

- (c) Visa att om två glatta slutna kurvor som har samma start-/slutpunkt som varandra har samma omloppstal, så är de två kurvorna gånghomotopa.
- (d) Visa att om två sådana kurvor har olika omloppstal, så kan de inte vara gånghomotopa.